

Cálculo elastoplástico de láminas plegadas no prismáticas de sección arbitraria

**J. R. González de Cangas
V. Arroyo Fernández
A. Samartín Quiroga
Drs. Ingenieros de Caminos
Universidad de Santander**

RESUMEN

Se presenta una técnica de cálculo plástico incremental específica para el modelo estructural lámina plegada, cuya eficiencia se intenta cuantificar en comparación con otros procedimientos de cálculo plástico de estructuras.

El complejo problema tridimensional que aparece implícito en este tipo de estructuras se ha reducido a dos análisis monodimensionales más sencillos —longitudinal y transversal— a los que se han aplicado procedimientos típicos de cálculo plástico de estructuras de barras.

Se ha estudiado el modelo en una serie de ejemplos prácticos que han corroborado la validez del mismo, al tiempo que han mostrado las extraordinarias posibilidades de aplicación a situaciones reales de gran interés en la ingeniería.

1. INTRODUCCION

El modelo estructural lámina plegada ha sido utilizado en la ingeniería desde hace varias décadas, a partir del primer trabajo de Ehlers, publicado en el año 1930 (1). Desde entonces, y dependiendo de las simplificaciones introducidas en el modelo lámina plegada, han sido numerosos los procedimientos de análisis desarrollados, que han permitido elaborar técnicas orientadas tanto al cálculo manual como al computador. En cada una de ambas direcciones son dignos de mención, respectivamente, los trabajos de Yitzhaki (2) y Scordelis (3).

La trascendencia del modelo lámina plegada en la ingeniería estructural se debe a su gran versatilidad, al permitir simular el comportamiento de una gran variedad de construcciones reales: tableros de puentes, láminas cilíndricas, depósitos, silos, paneles, cubiertas, zonas de núcleos tubulares, etc. El amplio rango de aplicación del referido modelo queda reflejado en las numerosas publicaciones que existen sobre el tema, entre las que cabe destacar, por su carácter monográfico, las realizadas por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (A.S.C.E.) (4) y por la Asociación Internacional de Estructuras Laminadas y Espaciales (I.A.S.S) (5).

En España ha existido una gran tradición constructiva y de desarrollo teórico de láminas plegadas, que tiene su origen en la figura de Eduardo Torroja, fundador y primer presidente de la I.A.S.S., el cual dio un gran impulso al estudio de las estructuras laminares y, particularmente, de las láminas plegadas. Posteriormente, merecen ser citados los trabajos de Del Pozo, Torroja y López Palanco (6), Granell (7) y Del Pozo y Samartín (8).

Hasta la fecha, la mayoría de los métodos de análisis de láminas plegadas se han basado en teorías elásticas y lineales, refiriéndose, fundamentalmente, a estructuras prismáticas. En el cálculo elástico de láminas no prismáticas cabe destacar el trabajo desarrollado por Johnson y Ti-ta Lee (9), cuya metodología ha sido ampliada recientemente por Samartín y González de Cangas (10), (11), (12) para el análisis de estructuras continuas con sección transversal y acciones totalmente arbitrarias.

Si bien la mayoría de los casos estudiados en la Ingeniería Civil pueden ser tratados dentro de un régimen lineal, particularmente si se considera la situación de servicio o de las tensiones admisibles, conviene, no obstante, destacar el hecho de que en la actualidad existe la práctica de comprobar las tensiones en la estructura en su fase de rotura, dimensionándola, por lo tanto, de acuerdo con este criterio.

Así pues, un cálculo más consecuente consistiría en un análisis de la misma “*ab initio*” en régimen no lineal. Esta filosofía ha sido aplicada en el caso simple de estructuras de barras y especialmente porticadas, en cuya dirección están los trabajos de Baker (13) y Neal (14). La extensión a estructuras bidimensionales, tales como placas, ha sido llevada a cabo por otros investigadores, entre los que se puede mencionar a Johansen (15), que introdujo la teoría de las líneas de rotura, y más actualmente Telemaco Van Langendonck (16).

Estos métodos suponen una situación plástica final de colapso (aparición de rótulas o líneas de rotura, según los casos), en la cual la estructura es un mecanismo y puede ser analizada de un modo simple mediante recursos elementales de la estática. Adolecen, sin embargo, de varios defectos importantes; por ejemplo: la dificultad de encontrar, entre todos los posibles, el mecanismo real de rotura; la complejidad de un tratamiento de la influencia del esfuerzo axial o del esfuerzo cortante en el valor del momento de rotura; la no consideración de requerimientos de ductilidad, etc.

Los defectos anteriores pueden ser paliados mediante la utilización de métodos alternativos, basados en técnicas incrementales, que han alcanzado un importante desarrollo tras la aparición del computador. Con ellos es posible simular la transición de una estructura inicialmente elástica a la situación plástica final, considerando todos los estados intermedios; asimismo permiten introducir otros efectos importantes, tales como los debidos al comportamiento constitutivo del material: endurecimiento de la deformación, fenómenos de carga y descarga, etc.

Dentro de estos métodos incrementales se destaca la contribución de Powell (17), orientada al cálculo de estructuras de barras, particularmente entramados planos.

Su extensión a otros tipos estructurales más complejos —placas, láminas, etc.— se ha llevado a cabo, de un modo general, mediante la utilización de técnicas numéricas no específicas (en especial, del método de los elementos finitos), a costa de las desventajas inherentes a dichas técnicas.

En este artículo se presenta un método de cálculo plástico incremental, específico para un determinado tipo de estructura: la lámina plegada.

Con el término “específico” se quiere indicar que se tienen en cuenta las características tipológicas de la estructura, lo que permite introducir en el análisis las hipótesis y simplificaciones pertinentes.

Dicha técnica supone una extensión natural del método de cálculo elástico de láminas plegadas no prismáticas mencionado en (11), considerando de forma explícita el comportamiento no lineal del material.

2. CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD. REQUISITOS NECESARIOS EN LA DEFINICION DE UN MODELO DE ANALISIS PLASTICO

Una de las características fundamentales de los materiales plásticos es la no existencia de una relación única entre tensiones y deformaciones. Por otra parte, una vez que cesan las fuerzas exteriores y las tensiones debidas a éstas han excedido de un valor crítico —tensión de fluencia—, aparecen deformaciones remanentes.

En el planteamiento y resolución de un problema plástico de Cálculo de Estructuras existen tres apartados fundamentales:

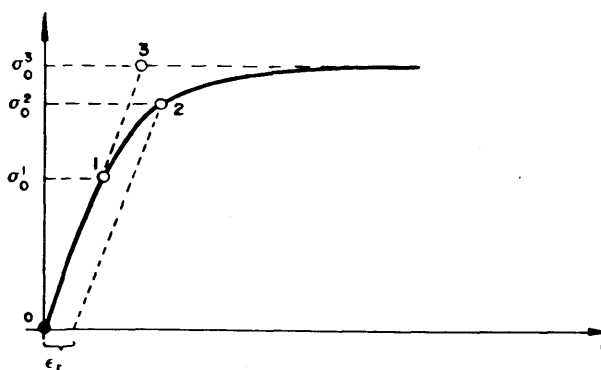
- a) Discretización estructural.
- b) Elección del modelo de comportamiento del material.
- c) Técnicas numéricas de resolución.

En lo referente al primer apartado, y salvo situaciones particulares de tipología estructural, dentro de las que se incluye el modelo de lámina plegada, es necesario recurrir en la mayoría de los casos a técnicas generales de cálculo de estructuras y en particular al método de los Elementos Finitos.

En la elección del modelo de comportamiento del material es necesario definir una serie de parámetros básicos, cuyo significado en los casos de elastoplasticidad plana y tridimensional se esboza a continuación.

2.1. Definición de la tensión de fluencia

Fig. 1.
Tensión de fluencia.



No existe un criterio único para la definición del valor de la tensión de fluencia; en la práctica se utilizan diferentes métodos, que conducen a resultados distintos, y entre los cuales, para el caso de tensión plana, se pueden citar los siguientes (figura 1):

- Método del límite de proporcionalidad: En la curva tensión-deformación del material, indica el verdadero punto de desviación de la elasticidad lineal —tensión σ_0^1 —. En la práctica es de difícil determinación.
- Método “offset”: Se define la tensión de fluencia, σ_0^2 , como aquella que corresponde a una deformación remanente, ϵ_r , previamente establecida. Es un método de fácil aplicación, si bien el valor obtenido carece de significado físico, dada la arbitrariedad en la elección de ϵ_r .

- Método de extrapolación de Lode: La curva $\sigma-\epsilon$ se sustituye por dos tramos lineales, quedando definida la tensión de fluencia, σ_0^3 , por el punto de intersección de dichos tramos. Se comprende asimismo la carencia de significación física de este procedimiento.

2.2. Condición de fluencia

En la elasto-plasticidad tridimensional es necesario, asimismo, definir un criterio mediante el cual, conocido el estado tensional en un punto, pueda discernirse si su comportamiento corresponde al rango elástico o al rango plástico.

En general, el criterio viene definido por una superficie en el espacio $(\underline{\sigma}, \theta)$:

$$f(\underline{\sigma}, \theta, K) = 0 \quad (2.1)$$

donde $\underline{\sigma}$ representa el tensor de tensiones en el punto; θ , la temperatura y K la historia de carga en el rango plástico (figura 2).

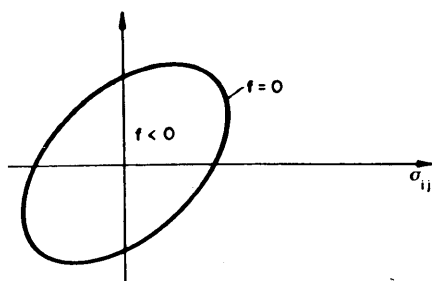


Fig. 2.
Condición de fluencia.

Para puntos interiores al dominio definido por la citada superficie ($f < 0$), el estado tensión-deformación es elástico (dominio elástico).

La condición de plastificación se alcanza para los puntos situados en la superficie referida ($f = 0$); en esta situación se producen deformaciones remanentes (dominio plástico).

2.3. Ley de flujo plástico

Esta ley establece una relación entre la deformación y la tensión en la fase plástica.

En el caso general esta ley expresa que la deformación plástica es proporcional al gradiente de tensión de una función $g(\underline{\sigma}, \theta, K)$, denominada potencial plástico, con los significados para $\underline{\sigma}$, θ y K anteriormente expuestos:

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2)$$

en donde ϵ_{ij}^P y σ_{ij} representan, respectivamente, los tensores de deformación plástica y de tensión, y $d\lambda(\underline{\sigma}, \theta, K, d\underline{\sigma}, d\theta)$ es el factor de proporcionalidad.

En el caso particular de que el potencial plástico, g , coincida con la función de fluencia, f , la plasticidad se denomina asociada, y la ley de flujo plástico adquiere la forma:

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.3)$$

relación que se denomina ley de normalidad. Esta ley expresa el hecho de que el incremento de deformación plástica es normal a la superficie de fluencia (figura 3).

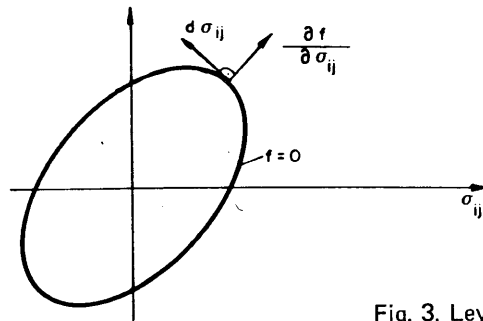


Fig. 3. Ley de normalidad.

2.4. Regla de endurecimiento

Mediante esta regla se define la evolución de la superficie de fluencia ante posibles procesos de carga y descarga, o lo que es igual, se determina el cambio que se produce en la condición de fluencia.

Se entiende por endurecimiento el fenómeno por el cual, en el rango de tensiones que superan la de fluencia, un aumento en la deformación requiere un aumento en la tensión correspondiente.

Las reglas de endurecimiento más utilizadas en la práctica son las siguientes:

a) *Modelo plástico perfecto (figura 4.a).*

En este modelo al alcanzarse la tensión de fluencia se produce un aumento de la deformación a tensión constante (igual a la de fluencia).

Se trata de un modelo de gran aplicación práctica por su sencillez, que hace posible la introducción de importantes simplificaciones en el análisis.

b) *Endurecimiento isótropo (figura 4.b).*

En el caso general supone una expansión uniforme de la superficie de fluencia una vez alcanzada la condición de plastificación. En el caso particular de tensión plana ello se traduce en un diagrama σ — ϵ bilineal, en el cual la pendiente del tramo plástico es mayor que cero. Por lo tanto, la tensión de fluencia depende de la deformación remanente en cada instante.

c) *Endurecimiento cinemático (figura 4.c).*

En este caso la superficie de fluencia experimenta una traslación en lugar de la expansión mencionada en el caso anterior, lo cual implica que no existe simetría respecto al origen en la condición de fluencia. En la situación particular de tensión plana, dicha traslación comporta que las tensiones de plastificación a tracción y compresión ya no son iguales.

De esta forma se pierde la isotropía del material, fenómeno que se conoce en la literatura con el nombre de efecto Bauschinger.

d) *Endurecimiento con distorsión (figura 4.d).*

En estos modelos se tiene en cuenta el hecho observado experimentalmente de que la superficie de fluencia, además de una traslación, experimenta una disminución en la dimensión correspondiente a la dirección de aplicación de la carga.

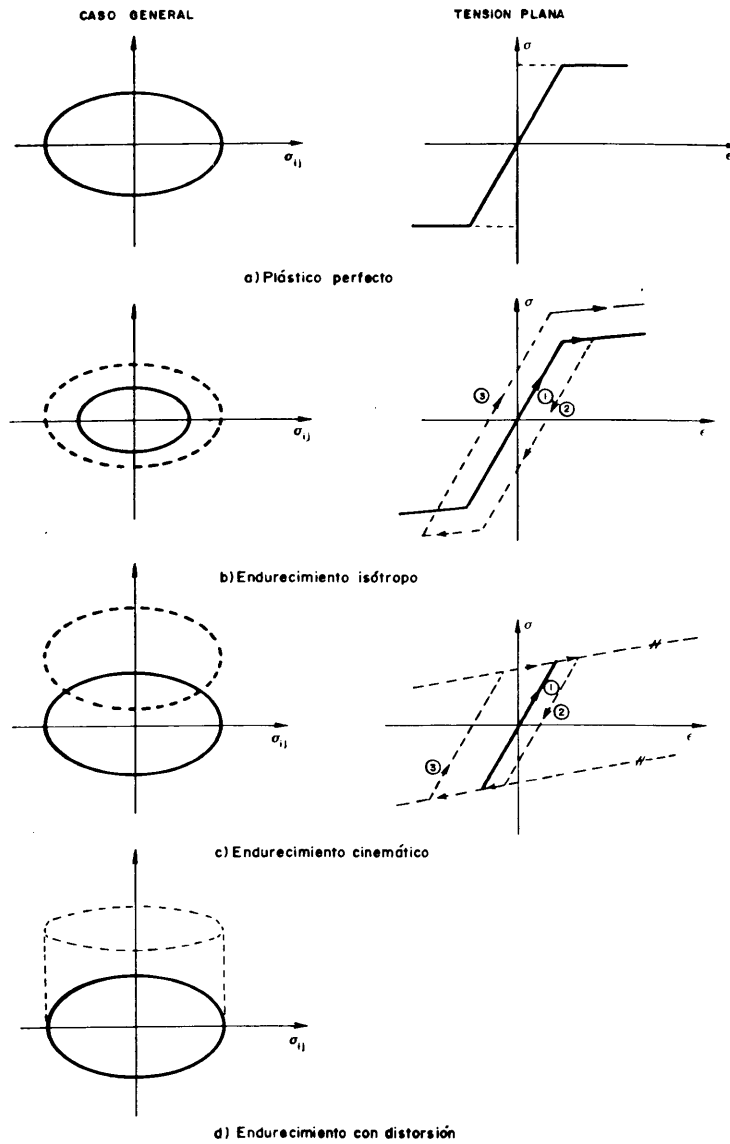


Fig. 4. Reglas de endurecimiento.

e) Modelos mixtos.

Son modelos que se obtienen al combinar adecuadamente algunos de los anteriormente mencionados.

2.5. Técnicas numéricas de resolución

La aplicación práctica de los conceptos anteriores a un problema general discretizado mediante el método de los elementos finitos conduce, como es bien conocido, a un sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_i(U_1, U_2, \dots, U_N) = P_i \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.4.a)$$

que puede ser expresado de un modo simplificado mediante una ecuación matricial del tipo:

$$\underline{K}_s(\underline{U}) \times \underline{U} = \underline{P} \quad (2.4.b)$$

en donde los vectores \underline{U} y \underline{P} representan, respectivamente, los movimientos en los grados de libertad considerados —incógnitas básicas del cálculo— y las cargas actuantes en dichos grados de libertad. Su dimensión es $N \times 1$, siendo N el número total de grados de libertad del problema. $\underline{K}_s(\underline{U})$ es una matriz cuadrada, denominada matriz secante, de dimensión $N \times N$, en general no simétrica. No tiene una expresión única y su definición es arbitraria.

Definido un estado de equilibrio del sistema (conocidos los U_i correspondientes a un estado de cargas P_i), es posible analizar las variaciones originadas por un incremento diferencial de carga. Para ello, si se diferencia en la expresión (2.4.a), se tiene:

$$\frac{\partial f_i}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial f_i}{\partial U_2} dU_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial U_N} dU_N = dP_i \quad (2.5.a)$$

o bien, en forma matricial:

$$\underline{K}_t(\underline{U}) \times d\underline{U} = d\underline{P} \quad (2.5.b)$$

en donde la matriz \underline{K}_t , de dimensión $N \times N$, se denomina matriz tangente. Sus términos $K_{tij} = \partial f_i / \partial U_j$ son funciones de punto, es decir, dependen del estado del sistema (U_i, P_i). Por lo tanto, su definición es única. Además, si la formulación del problema está basada en principios energéticos, dicha matriz es simétrica.

La resolución del anterior problema no lineal (2.4.a) hace necesario recurrir a técnicas numéricas particulares que pueden clasificarse en tres grandes grupos:

- Métodos iterativos.
- Métodos incrementales.
- Métodos predictivo-correctivos.

A continuación se analiza sucintamente cada uno de dichos grupos de procedimientos numéricos. Con el fin de facilitar la comprensión de los mismos se hace referencia a un sistema con un único grado de libertad.

2.5.1. Métodos iterativos

Estos métodos resultan adecuados cuando se trata de determinar el estado de un sistema bajo un conjunto de cargas supuestamente inferiores a las límites.

a) Método de la rigidez inicial.

Se trata de determinar el estado del sistema (2.4.b) correspondiente a unas cargas conocidas P_D (punto C de la figura 5.a). Para ello se considera una K_0 inicial (en general la correspondiente al problema lineal) que se mantiene constante a lo largo del siguiente proceso numérico:

$$\begin{aligned} K_0 \cdot U_0 &= P_D \rightarrow \text{se obtiene } U_0 \\ K_0 \cdot \Delta U_0 &= P_D - K_s(U_0) \cdot U_0 \text{ (figura 5.a)} \rightarrow \text{Se calcula } \Delta U_0 \text{ y } U_1 = U_0 + \Delta U_0 \\ &\dots\dots\dots \\ K_0 \cdot \Delta U_n &= P_D - K_s(U_n) \cdot U_n \quad \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_n; U_{n+1} = U_n + \Delta U_n \end{aligned}$$

El proceso finaliza cuando en un paso genérico se verifica $|\Delta U_n| < \epsilon$, siendo ϵ una cota de error previamente fijada.

escalón (figura 6). El proceso a seguir, adoptando como matriz inicial la K_0 ya mencionada en los procedimientos anteriores, es el siguiente:

$$K_0 \cdot \Delta U_0 = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_0 \text{ y } U_1 = U_0 + \Delta U_0$$

$$K_t(U_1) \Delta U_1 = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_1 ; U_2 = U_1 + \Delta U_1$$

.....

$$K_t(U_i) \Delta U_i = \Delta P \rightarrow \text{Se obtiene } \Delta U_i ; U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

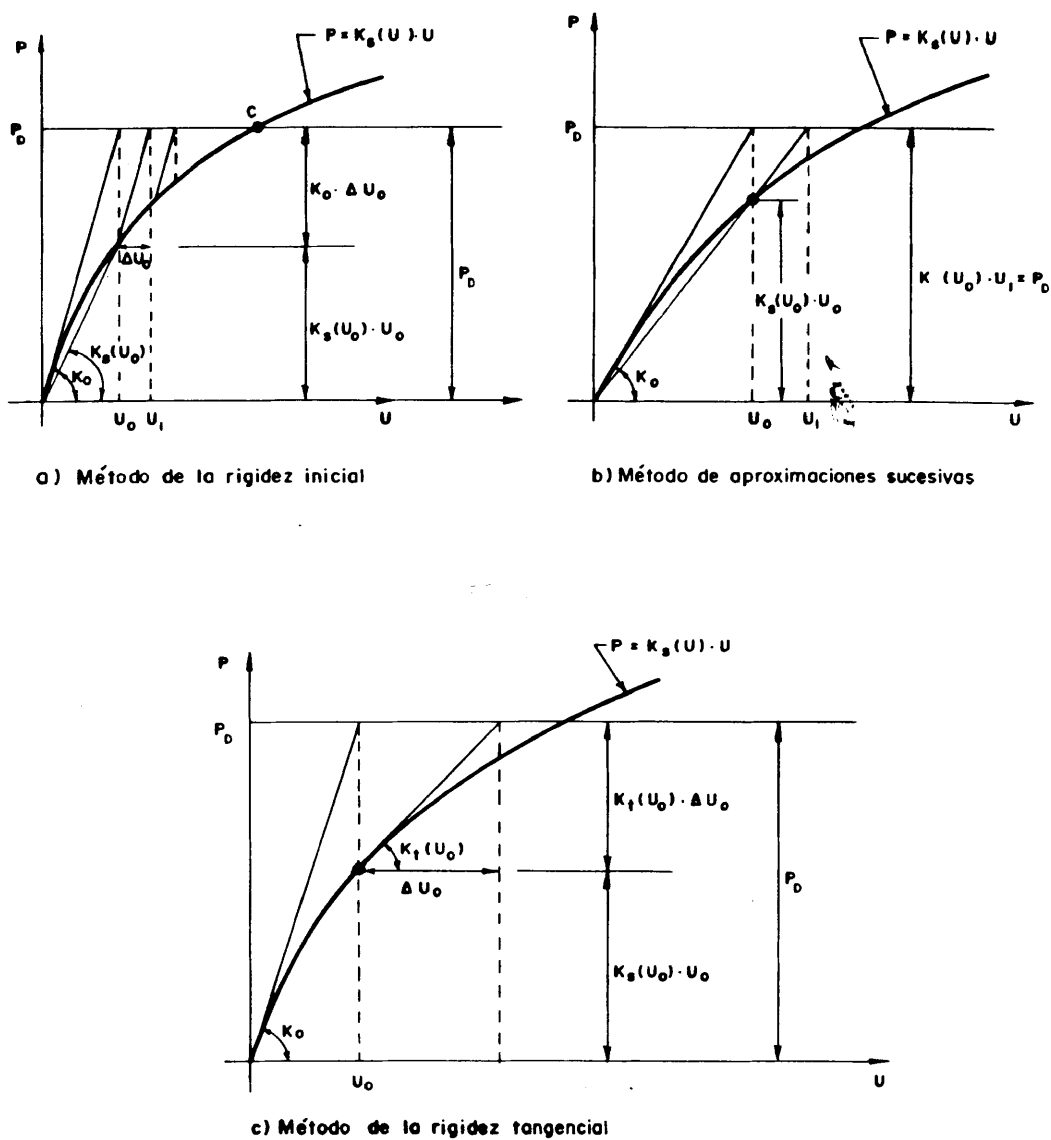


Fig. 5. Métodos iterativos.

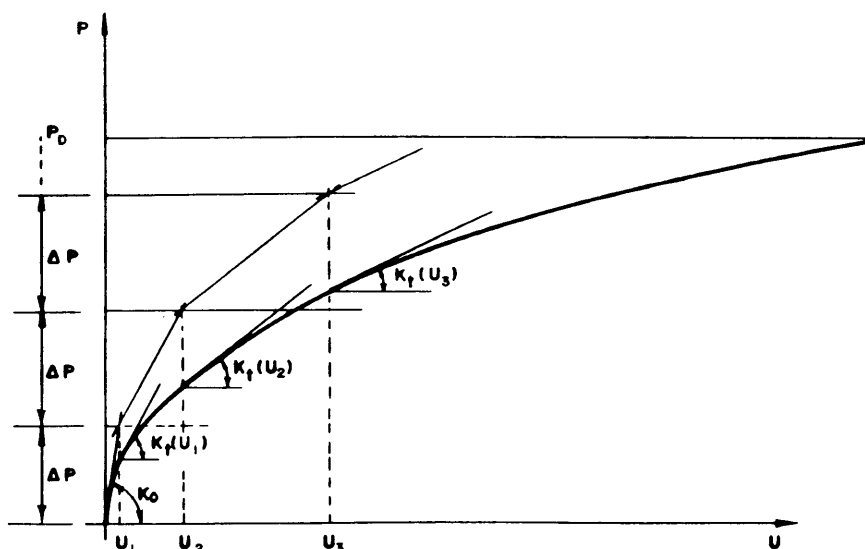


Fig. 6. Método incremental de Euler.

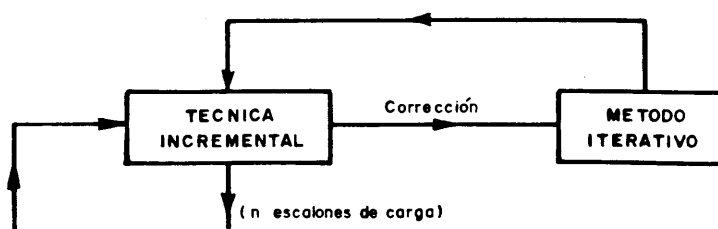


Fig. 7. Métodos predictivo-correctivos.

El cálculo finaliza al alcanzar el último escalón de carga.

El mayor inconveniente que presentan estos métodos radica en que, para determinadas situaciones, es necesario adoptar un valor pequeño para ΔP , a fin de obtener una precisión mínima aceptable, lo cual, obviamente, comporta un mayor número de escalones de carga con la repercusión correspondiente en el tiempo de computador necesario.

2.5.3. Métodos predictivo-correctivos

A fin de obviar los inconvenientes mencionados en los métodos anteriores, se puede utilizar una técnica incremental para predecir unos valores iniciales en los desplazamientos U , y cada vez que se ha aplicado un número determinado (n) de escalones de carga, se corrige el resultado obtenido para dichos desplazamientos U , mediante la utilización de alguno de los procedimientos iterativos anteriormente expuestos (figura 7).

3. DESCRIPCION DEL MODELO ADOPTADO EN EL ANALISIS PLASTICO DE LAMINAS PLEGADAS NO PRISMATICAS DE SECCION ARBITRARIA

3.1.Introducción

El modelo que se describe a continuación (18) es aplicable a láminas plegadas largas, y se supone que los movimientos y deformaciones producidos son lo suficientemente pequeños, de tal forma que permiten considerar lineales las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad (hipótesis de linealidad geométrica y cinemática). El comportamiento plástico del material se define más adelante.

Un planteamiento general del problema dentro de la teoría de la plasticidad requeriría un análisis tridimensional, lo cual exigiría la adopción de una superficie de fluencia, la definición de una ley de flujo plástico y una regla de endurecimiento, así como una técnica de discretización (por ejemplo, elementos finitos) que permitiesen el estudio de la estructura a nivel de fibra. Con ello se vería sensiblemente mermada la posibilidad de aprovechar las importantes simplificaciones que, desde un punto de vista computacional, permiten las hipótesis del modelo de lámina plegada utilizado. Las ventajas que dichas simplificaciones reportan han quedado patentes, para el caso elástico, en la publicación (11).

Por este motivo, y coherentemente con el mencionado modelo, se adopta una plasticidad monodimensional, a nivel de esfuerzos de viga, en ambas formas de trabajo de la estructura: extensión y flexión.

3.2. Discretización del modelo y simplificaciones introducidas en el cálculo

Se discretiza la lámina plegada, mediante secciones transversales, en un determinado número de segmentos o dovelas de igual longitud (figura 8.a).

El análisis estructural del conjunto se realiza mediante dos cálculos básicos:

- a) Un cálculo transversal para cada una de las dovelas procedentes de la discretización efectuada.
- b) El cálculo longitudinal de cada una de las losas que constituyen la lámina plegada.

En el cálculo transversal (efecto placa) la dovela se idealiza según un entramado plano cuyas características corresponden a su sección transversal central (figura 8.b). Dicha dovela se sustenta mediante un número determinado de coacciones ficticias, de forma tal que el entramado sea intraslacional. Las acciones a considerar son las que directamente gravitan sobre ella (figura 8.b).

En el cálculo longitudinal (efecto laja) se analiza cada losa como una viga cargada en su plano (figura 8.c). Las acciones correspondientes provienen de la descomposición de las reacciones en los apoyos ficticios introducidos, en fuerzas en el plano de cada losa (figura 8.d). Además, podrán actuar unos momentos en los extremos, si las condiciones de apoyo son diferentes de las de tipo diafragma.

Posteriormente, en ambos cálculos debe ser tenido en cuenta el monolitismo estructural, que modifica los resultados de los análisis anteriores en la forma que detalladamente se describe para el caso elástico en la publicación (11).

Coherentemente con la discretización anterior, el cálculo plástico de la lámina plegada se realiza considerando los dos modelos básicos referidos: entramado plano y viga. Con ello, el complejo problema tridimensional se reduce a dos casos de plasticidad monodimensional: cálculo plástico transversal y cálculo plástico longitudinal.

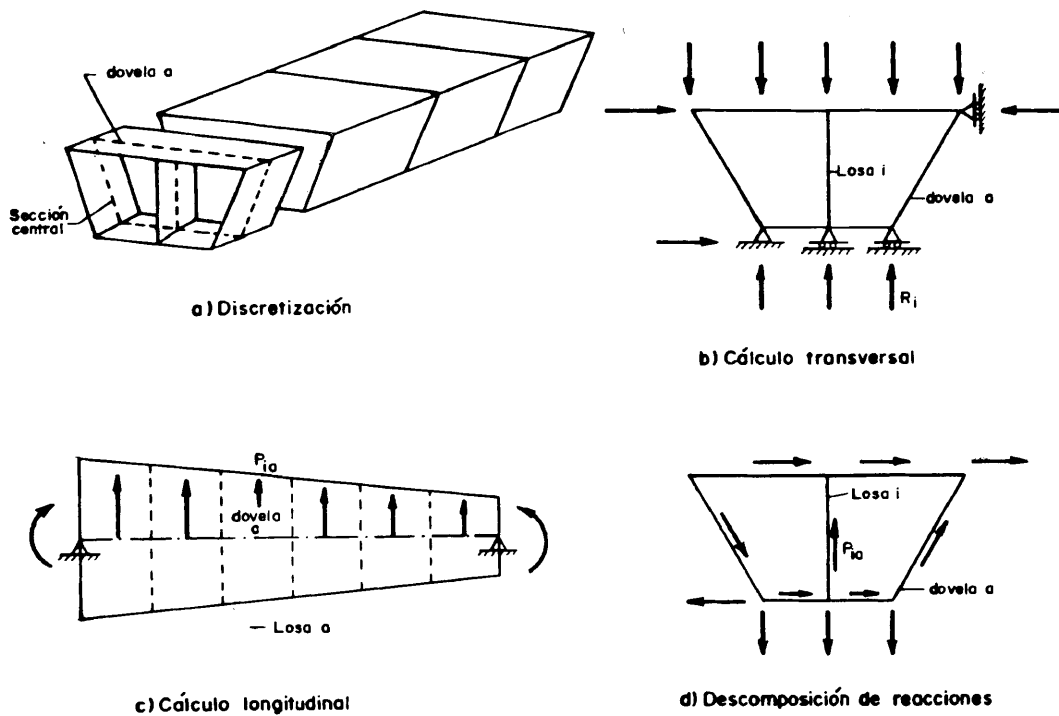


Fig. 8. Discretización del modelo estructural.

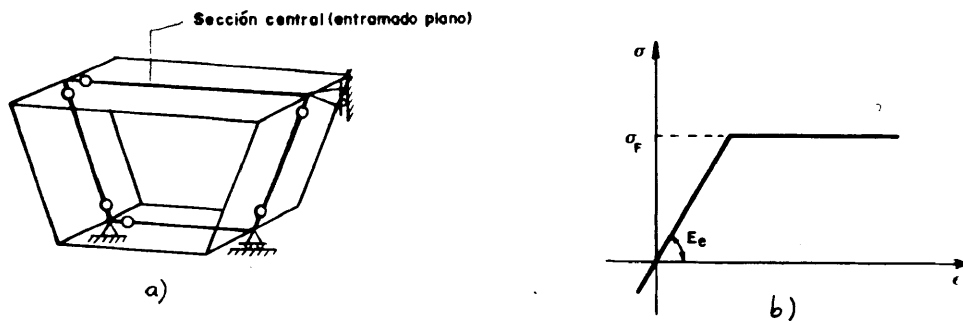


Fig. 9. Cálculo plástico transversal.

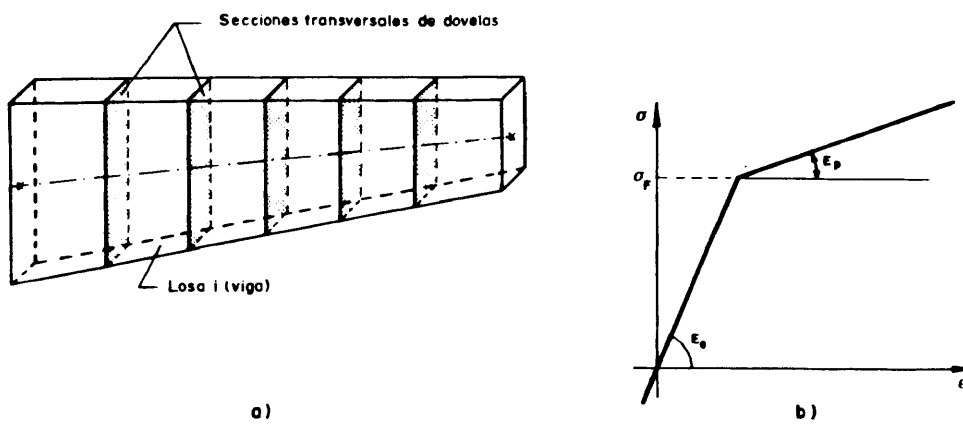


Fig. 10. Cálculo plástico longitudinal.

a) Cálculo plástico transversal.

Este cálculo se lleva a cabo siguiendo la teoría elemental de la plasticidad aplicada a entramados planos (figura 9.a). Por simplicidad, y con fines meramente ilustrativos, se adopta como diagrama tensión-deformación el correspondiente a un material elastoplástico perfecto (figura 9.b).

El análisis se efectúa a nivel de sección y en los extremos de cada viga del entramado, siguiendo el criterio de plastificación que se describirá posteriormente. En determinados casos (existencia de cargas concentradas, acciones repartidas, etc.) es necesario considerar nudos adicionales intermedios que permitan tener en cuenta la aparición de rótulas en secciones distintas de las extremas.

b) Cálculo plástico longitudinal.

El desarrollo del análisis es análogo al descrito en el apartado anterior, aplicándose en este caso a vigas, en lugar de entramados planos.

Dada la técnica de discretización utilizada, se asimila el comportamiento de cada dovela al de su sección central correspondiente. Consecuentemente, la posible aparición de rótulas plásticas se analiza únicamente en dichas secciones centrales (figura 10.a).

La ley σ - ϵ anterior se modifica para este cálculo mediante la introducción de una regla de endurecimiento isótropo (figura 10.b). La razón de esta modificación radica en la propia técnica utilizada en el análisis, que al estar basada en métodos de flexibilidad, produciría fenómenos de inestabilidad numérica en el caso de adoptar una pendiente $E_p = 0$. No obstante, con el fin de simular de la forma más aproximada posible el comportamiento inicialmente supuesto (material elastoplástico perfecto), se elige un valor de E_p suficientemente pequeño (del orden de un 1 por 100 de E_e).

En lo sucesivo, en los desarrollos teóricos, así como en los ejemplos analizados, se utilizan las leyes σ - ϵ anteriormente descritas, únicamente por razones de índole computacional. Por lo tanto, esto no debe entenderse como una limitación intrínseca al modelo, ya que cualquier tipo de ley σ - ϵ podría ser simulado mediante diferentes tramos rectos con pendientes E_i adecuadas (figura 11).

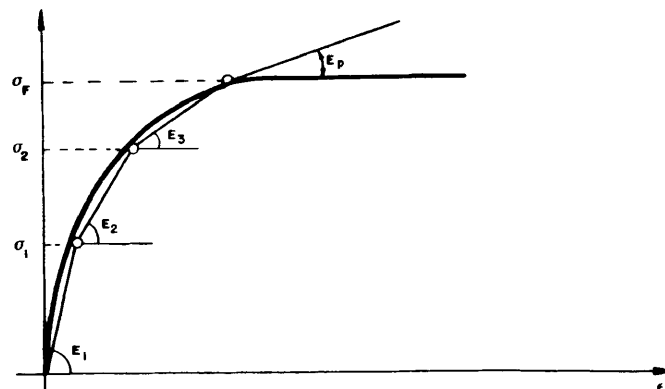


Fig. 11. Ley general tensión-deformación.

3.3. Criterio de plastificación. Formación y cierre de rótulas plásticas

a) Concepto de rótula plástica.

Según el valor que alcancen las tensiones en cada fibra de una sección, se distinguen

tres posibles estados de la misma, que para el caso de un material elastoplástico perfecto se representan en la figura 12, y en la 13 para el caso de un material con un endurecimiento isótopo a la deformación.

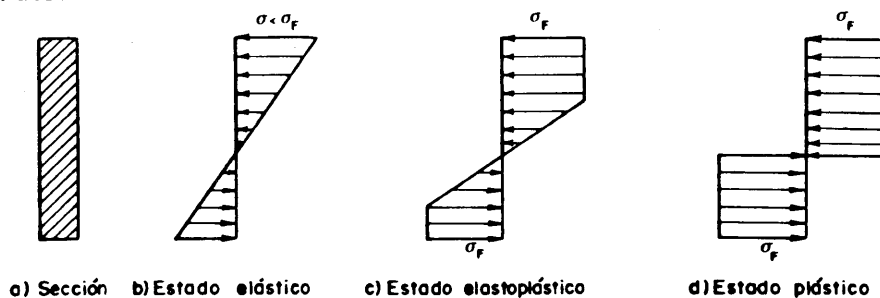


Fig. 12. Situaciones en una sección según su estado tensional (material elastoplástico perfecto).

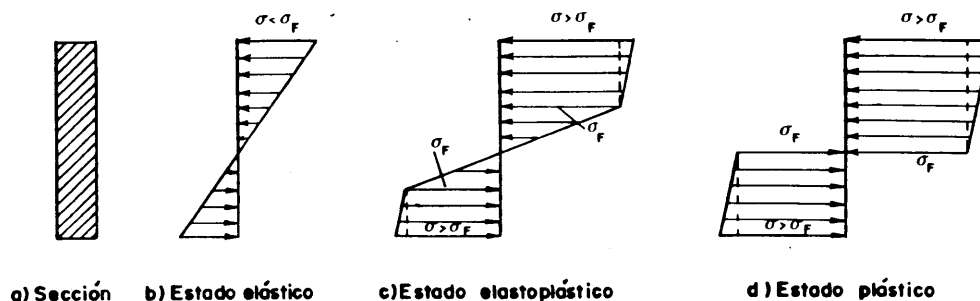


Fig. 13. Situaciones en una sección según su estado tensional (material con endurecimiento isótopo).

En el caso de material con endurecimiento isótopo, el hecho de que se alcancen tensiones superiores a la de la fluencia ($\sigma > \sigma_F$) se debe simplemente al propio modelo $\sigma-\epsilon$ considerado (figura 10.b).

En el contexto del modelo adoptado en esta publicación la definición de rótula plástica corresponde a la situación de una sección en estado plástico, según se ha considerado en las figuras 12 y 13 anteriores, situación a la que se llega en virtud del siguiente criterio de plastificación.

b) Criterio de plastificación o fluencia.

En los dos procesos de cálculo plástico monodimensional (transversal y longitudinal) a que se ha reducido el problema plástico general, se tiene en cuenta la acción conjunta del momento flector y esfuerzo axil. La actuación del esfuerzo cortante no ha sido considerada, a fin de simplificar el análisis.

Debido a la propia tipología estructural de la lámina plegada, el criterio de plastificación adoptado es el correspondiente a una sección rectangular (14), (19), siendo su expresión:

$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 = 1 \quad (3.1)$$

en donde:

- M** = Momento flector que actúa sobre la sección.
- N** = Esfuerzo axil que actúa sobre la sección.
- M_p** = Momento de plastificación de la sección por flexión pura.
- N_p** = Axil de plastificación de la sección por tracción o compresión simples.

La representación gráfica del anterior criterio se muestra en la figura 14.

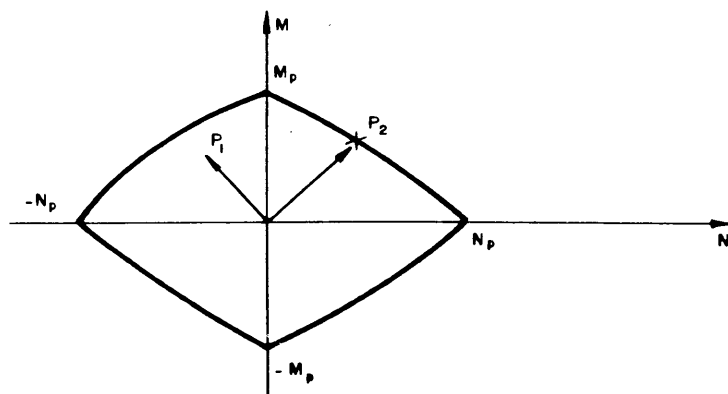


Fig. 14.
Criterio de
plastificación.

Todos los puntos situados en el interior del recinto (P_1) corresponden a secciones en fase elástica o elastoplástica, y los que se encuentran en el contorno (P_2), a secciones en estado plástico.

c) *Formación de rótulas.*

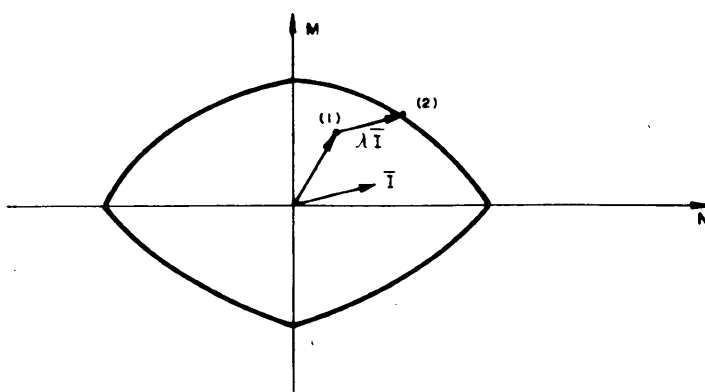


Fig. 15.
Formación de
rótulas plásticas.

Según se describe más adelante, el método numérico elegido en el modelo aquí considerado ha sido uno incremental modificado.

Supuesto que al iniciarse un determinado escalón de carga, i , los valores acumulados de los esfuerzos en una sección, M y N , corresponden a una situación elástica o elastoplástica (punto 1 de la figura 15) y en el cálculo lineal correspondiente a dicho escalón se obtienen unos valores M_i y N_i , tales que definen el vector I , se producirá una rótula plástica en esa sección, para un valor λ del incremento de carga, cuando al desplazar el punto (1) una cantidad λI se alcance el límite del recinto en el punto (2) (figura 15). Conviene señalar que el valor de λ puede ser menor o mayor que la unidad.

Dado que el proceso anterior debe realizarse para todas las secciones y en ambos cálculos, longitudinal y transversal, el valor del incremento de carga correspondiente al escalón en cuestión viene definido por el menor de todos los λ obtenidos.

Analíticamente, lo anterior implica las siguientes operaciones:

a) *Plastificación longitudinal.*

- Se definen en cada placa y cada sección nodal las siguientes características estructurales:

Momentos de plastificación positivo (M_{p1}) y negativo (M_{p2}). Axil de plastificación: N_p .

- El análisis comienza a partir de un determinado nivel de carga, suficientemente pequeño para producir en la estructura resultados dentro del rango elástico y lineal. De

esta forma se obtienen, para cada sección nodal de cada placa, los esfuerzos M_0 y N_0 (momento flector y esfuerzo axial, respectivamente).

- Las cargas se incrementan proporcionalmente hasta que se produce la primera rótula plástica en una determinada sección (a) de una losa (j), es decir hasta que se verifica la condición:

$$\left[\frac{\lambda_1 M_0}{M_p} \right] + \left[\frac{\lambda_1 N_0}{N_p} \right]^2 = 1 \quad (3.2)$$

siendo λ_1 el factor de escala del primer escalón de carga.

- En la losa y sección donde se produce la plastificación se modifica el módulo de deformación longitudinal, que cambia su valor de E_e a E_p (figura 10.b). En el resto de las secciones se mantiene el valor original E_e .
- Se procede a un nuevo cálculo elástico de la estructura, correspondiente a un nuevo escalón de carga, dentro del cual se alcanza la segunda plastificación en otra sección de la misma o diferente placa. Es decir:

$$\left[\frac{\lambda_1 M_0 + \lambda_2 M'_0}{M_p} \right] + \left[\frac{\lambda_1 N_0 + \lambda_2 N'_0}{N_p} \right]^2 = 1 \quad (3.3)$$

en donde λ_2 es el nuevo factor de escala, correspondiente a este segundo escalón de carga, y M'_0 y N'_0 representan los esfuerzos del cálculo elástico en el mencionado segundo escalón. Nuevamente se modifica el módulo de deformación (de E_e a E_p) en la segunda sección plastificada.

- El paso anterior se repite hasta que se verifique alguno de los criterios de fallo estructural que posteriormente se definen.

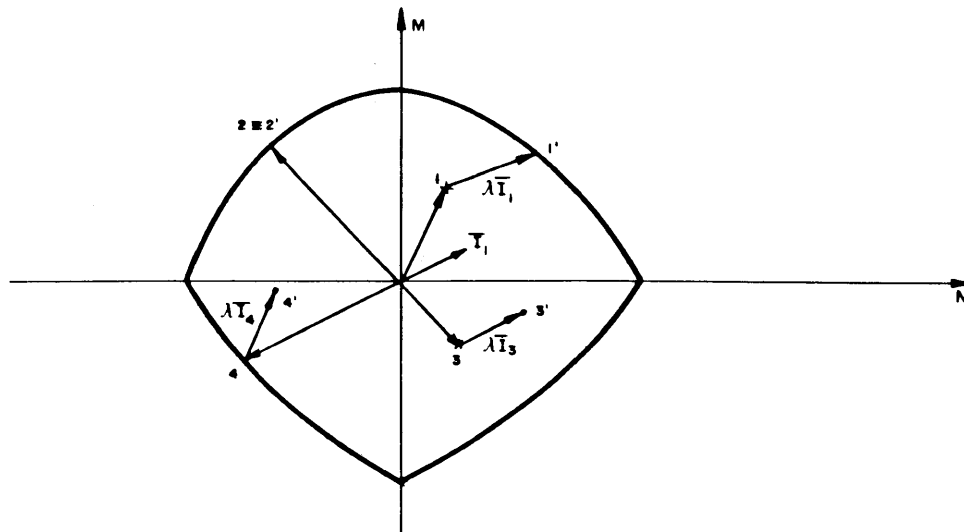


Fig. 16. Posibilidades de evolución del estado tensional de una sección en un escalón de carga arbitrario.

b) *Plastificación transversal.*

El procedimiento es, salvo ligeras modificaciones, similar al anterior. Estas diferencias se deben fundamentalmente al hecho de que en el análisis transversal cada dovela se calcula

como un entramado plano. Así, solamente pueden aparecer rótulas en los extremos de cada barra(*). La aparición de una rótula exige, en este caso, las pertinentes modificaciones en los términos de la matriz de rigidez del entramado y esfuerzos de empotramiento rígido.

El resto del análisis sigue los pasos descritos en el cálculo longitudinal.

c) *Cierre de rótulas.*

Las posibilidades de evolución del estado tensional en una sección para un determinado escalón de carga se reducen a las cuatro que se representan en la figura 16. El punto 1 (que pasa a 1') corresponde a una sección en la que se forma una rótula, tal como se ha descrito en el apartado anterior. En el caso del punto 2, una sección que ya estaba plastificada permanece en la misma situación. El punto 3 corresponde a una sección en estado elástico o elastoplástico y que continúa en el mismo estado al finalizar el escalón de carga mencionado. Por último, el punto 4 representa una situación peculiar, para la cual una sección que estaba plastificada vuelve a adquirir sus propiedades elásticas debido a un cambio de signo en los esfuerzos a que se halla sometida. Esta situación se denomina "cierre de rótula" y corresponde al proceso inverso de la formación de rótulas ya mencionada.

d) *Cambios en la estructura debidos a la formación y cierre de rótulas.*

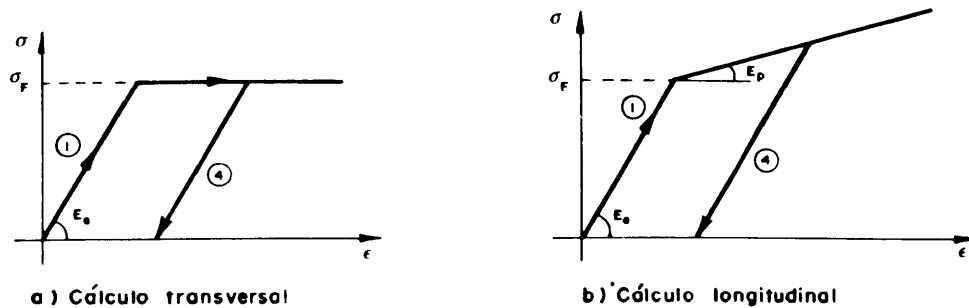


Fig. 17. Formación y cierre de rótulas.

Los cambios estructurales debidos a la formación o cierre de rótulas se refieren fundamentalmente a las leyes constitutivas. Ello supone la modificación del valor adoptado para el módulo de deformación longitudinal del material. Mientras que éste se halle dentro del rango elástico, el valor considerado es E_e (figura 17). Cuando en una sección se forma una rótula plástica, dicho módulo varía, adoptando en este caso el valor E_p (igual a cero en el cálculo transversal—figura 17.a). Al producirse un cierre de rótula, el proceso es inverso y el módulo pasa del valor E_p al E_e elástico inicial.

Este hecho repercute en el análisis de la forma siguiente:

Si se supone que el cierre de rótula tiene lugar durante el escalón de carga i , se deben realizar las modificaciones que se indican:

- a) **Plastificación longitudinal.** Los resultados obtenidos en el mencionado escalón no se tienen en cuenta. El módulo de deformación correspondiente a la sección donde ha tenido lugar el cierre se cambia, adoptándose el valor inicial E_e . Se repite nuevamente el cálculo para este escalón i , una vez realizada la modificación anterior, y los resultados que se determinen se suman a los obtenidos hasta el escalón $i-1$.
- b) **Plastificación transversal.** Las modificaciones a introducir en el análisis son similares a las mencionadas anteriormente. En este caso, la rótula donde tiene lugar el cierre

Nota (*) Esta condición no supone restricción alguna al comportamiento estructural, ya que las plastificaciones en secciones intermedias pueden ser simuladas mediante la introducción de nudos adicionales.

se convierte en un nudo rígido, con las consiguientes modificaciones en los términos de la matriz de rigidez y esfuerzos de empotramiento rígido del entramado transversal correspondiente.

3.4. Justificación del método numérico adoptado

Como se ha mencionado en el apartado 2.5, al analizar las diferentes técnicas numéricas de análisis no lineal, los métodos iterativos sólo resultan adecuados cuando se trata de determinar el estado del sistema bajo un conjunto de cargas supuestamente inferiores a las límites, ya que, en caso contrario, el proceso podría no ser convergente.

Por ese motivo, la técnica aquí adoptada es una técnica incremental. Si además se tienen en cuenta las simplificaciones introducidas por el carácter bilineal de las leyes $\sigma-\epsilon$, el cálculo puede realizarse de forma lineal entre dos eventos consecutivos (se entiende por evento la formación o cierre de una rótula). Esto permite, a su vez, utilizar una técnica incremental tal que, en lugar de considerar incrementos fijos de carga, éstos vienen determinados de forma directa por la aparición de un evento (figura 18). La ventaja fundamental que presenta esta técnica frente a la de incrementos fijos de carga radica en el hecho de que las situaciones que sucesivamente se van obteniendo corresponden a verdaderos estados de equilibrio.

Sin embargo, tiene los inconvenientes de que, por una parte, la posible existencia de rótulas muy próximas entre sí —cuya relación $\Delta\lambda/\Delta U$ sea muy pequeña (figura 18)— origina un aumento innecesario de iteraciones y, por otra, debido a los errores de redondeo característicos de un cálculo por computador, no se mantienen las simetrías en la estructura.

Dichos inconvenientes pueden ser soslayados si se introduce el concepto de agrupación de rótulas (figura 18). En este caso el escalón de carga determinado según el proceso general se incrementa en una cantidad adicional, de tal modo que se considera simultánea la aparición de todas las rótulas que se formen dentro de dicho incremento. Ello supone una ligera desviación de la situación de verdadero equilibrio, pero siempre inferior a la que se obtendría mediante una técnica de incrementos fijos de carga (figura 18), con la ventaja adicional de aumentar notablemente la velocidad de convergencia.

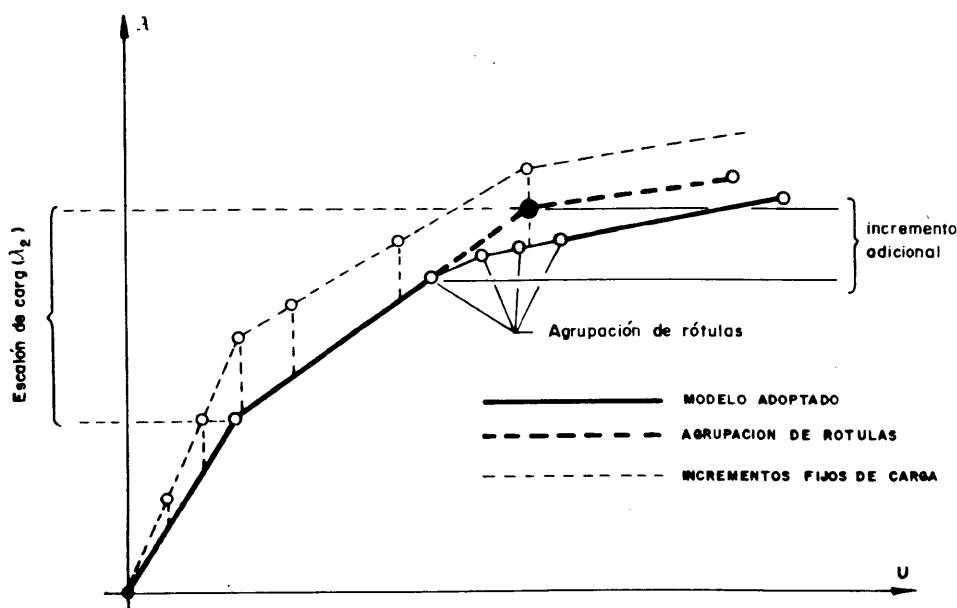


Fig. 18. Método numérico. Representación para un sistema con un grado de libertad.

3.5. Criterios que determinan la finalización del proceso de cálculo

El proceso de cálculo finaliza cuando en un ciclo se produce una de las siguientes situaciones:

- a) Fallo estructural.
- b) Se cumplen determinadas condiciones previamente establecidas.

3.5.1. Fallo estructural

Se consideran como causas de fallo estructural las siguientes:

- a) Se alcanza el límite de ductilidad previamente fijado. Se entiende aquí por ductilidad el cociente entre la deformación total y la deformación límite elástica, es decir:

$$\text{Ductilidad} = \frac{k_e + \sum \Delta k_i}{k_e}$$

siendo k_e la curvatura límite elástica de la sección e Δk_i el incremento plástico de la curvatura debido al escalón de carga Δp_i .

- b) En el mencionado ciclo la relación entre el incremento de carga λ y la flecha máxima obtenida en el mismo es menor que un valor previamente definido.
- c) Se produce una matriz de rigidez singular en el cálculo transversal, como consecuencia de la formación de un mecanismo en el entramado correspondiente.
- d) Se produce una ruina parcial de la estructura por rotura de un voladizo.

3.5.2. Condiciones previas

El cálculo mencionado debe finalizarse si se alcanza el valor total de la carga aplicada. A veces, en situaciones estructurales muy anormales, conviene evitar un tiempo excesivo de computación prescribiendo el número máximo de ciclos de carga permitidos.

4. PROGRAMA DE COMPUTADOR

Basado en el modelo anterior se ha realizado un programa de computador, en lenguaje FORTRAN, implementado en un ordenador HP3000, que permite el cálculo elastoplástico de láminas plegadas no prismáticas, largas, de sección transversal totalmente arbitraria y sometidas a la actuación de cualquier tipo de cargas. El diagrama de flujo correspondiente a tal programa se muestra en la figura 19.

5. EJEMPLO ILUSTRATIVO

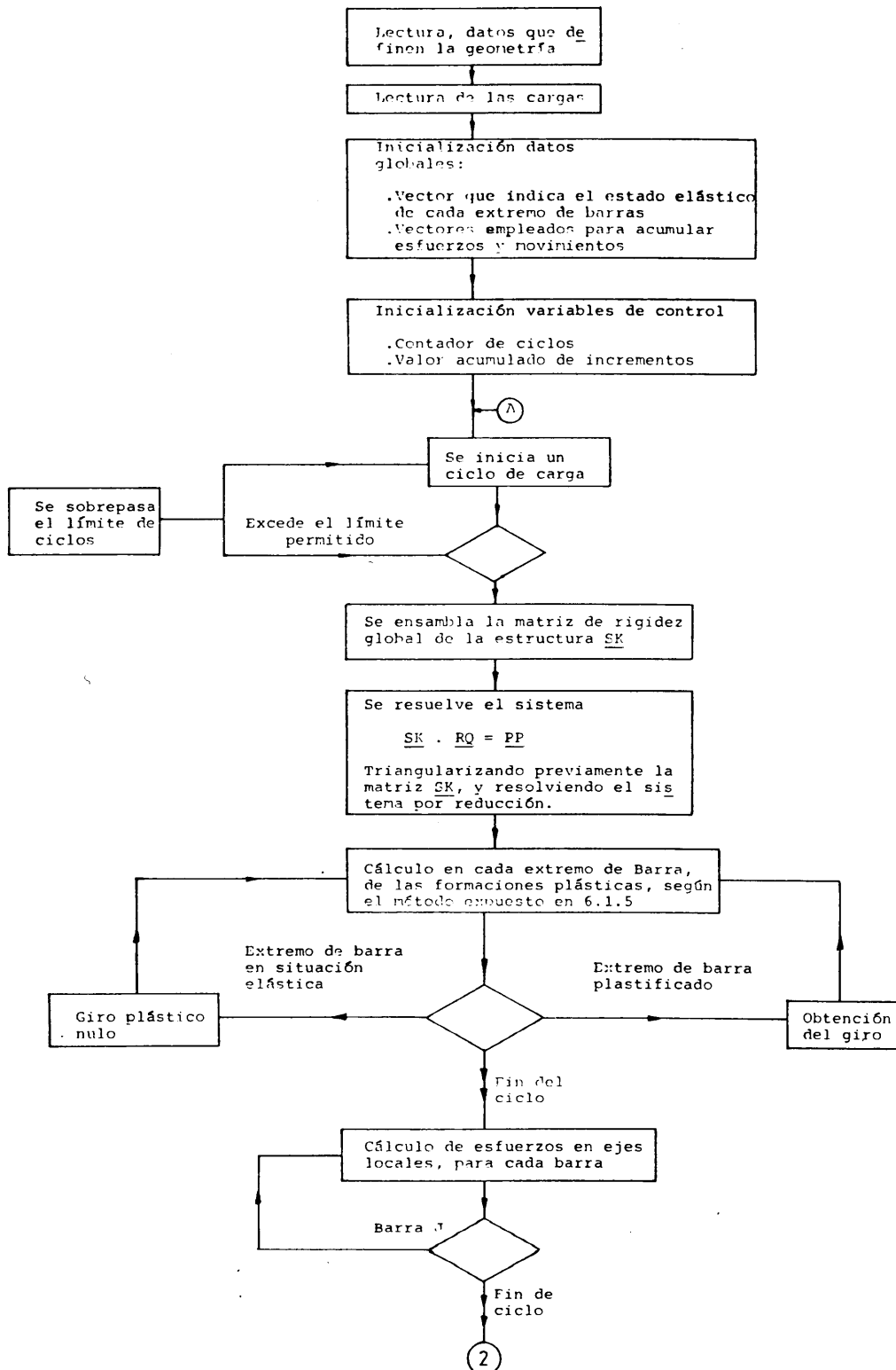
El ejemplo que se presenta en este apartado tiene por objeto el comprobar la validez del modelo de comportamiento elastoplástico anteriormente descrito, así como servir de guía para explicar el proceso general seguido en el mismo.

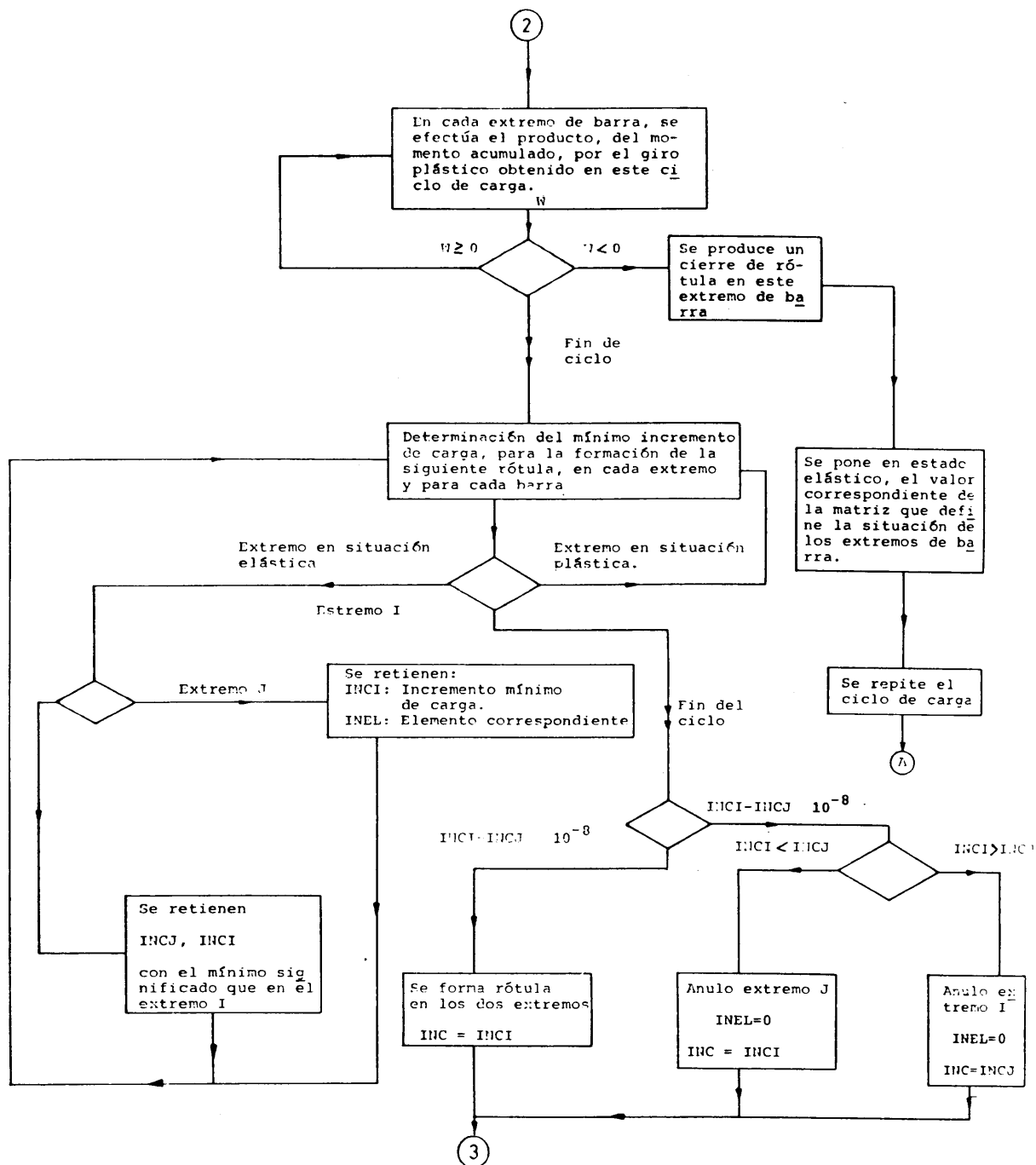
Con esa finalidad se ha elegido una lámina prismática de 30.00 m de luz, cuyas características geométricas se muestran en la figura 20.

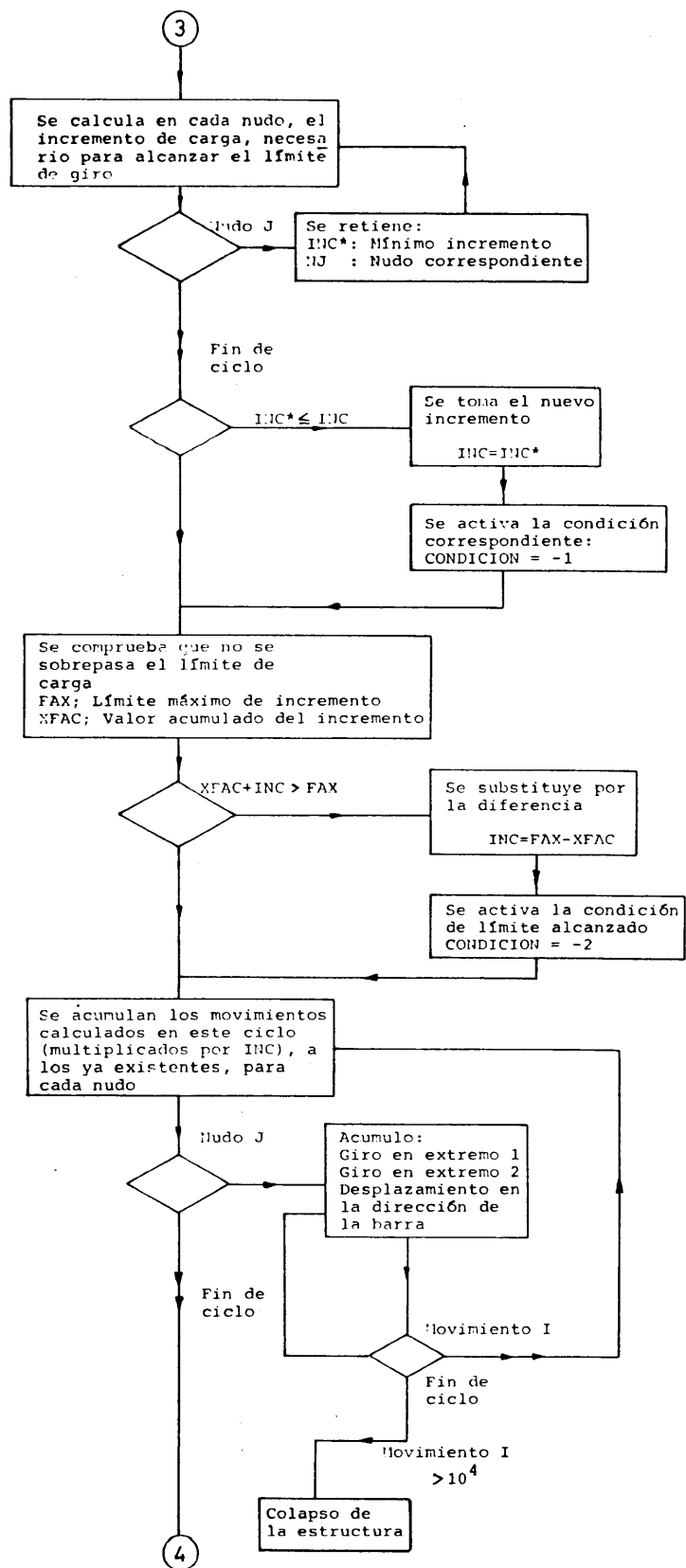
Como datos básicos del cálculo se han adoptado los siguientes:

- Módulo de deformación longitudinal: $E_e = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$.

- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.20$.
- Módulo plástico: $E_p = 0.01 \times E_e = 2 \times 10^4 \text{ t/m}^2$.
- Límite elástico: 5000 t/m^2 .
- Coeficiente de forma: 1.5; correspondiente a una sección rectangular. Se supone idéntico para ambos momentos de plastificación: positivo y negativo.







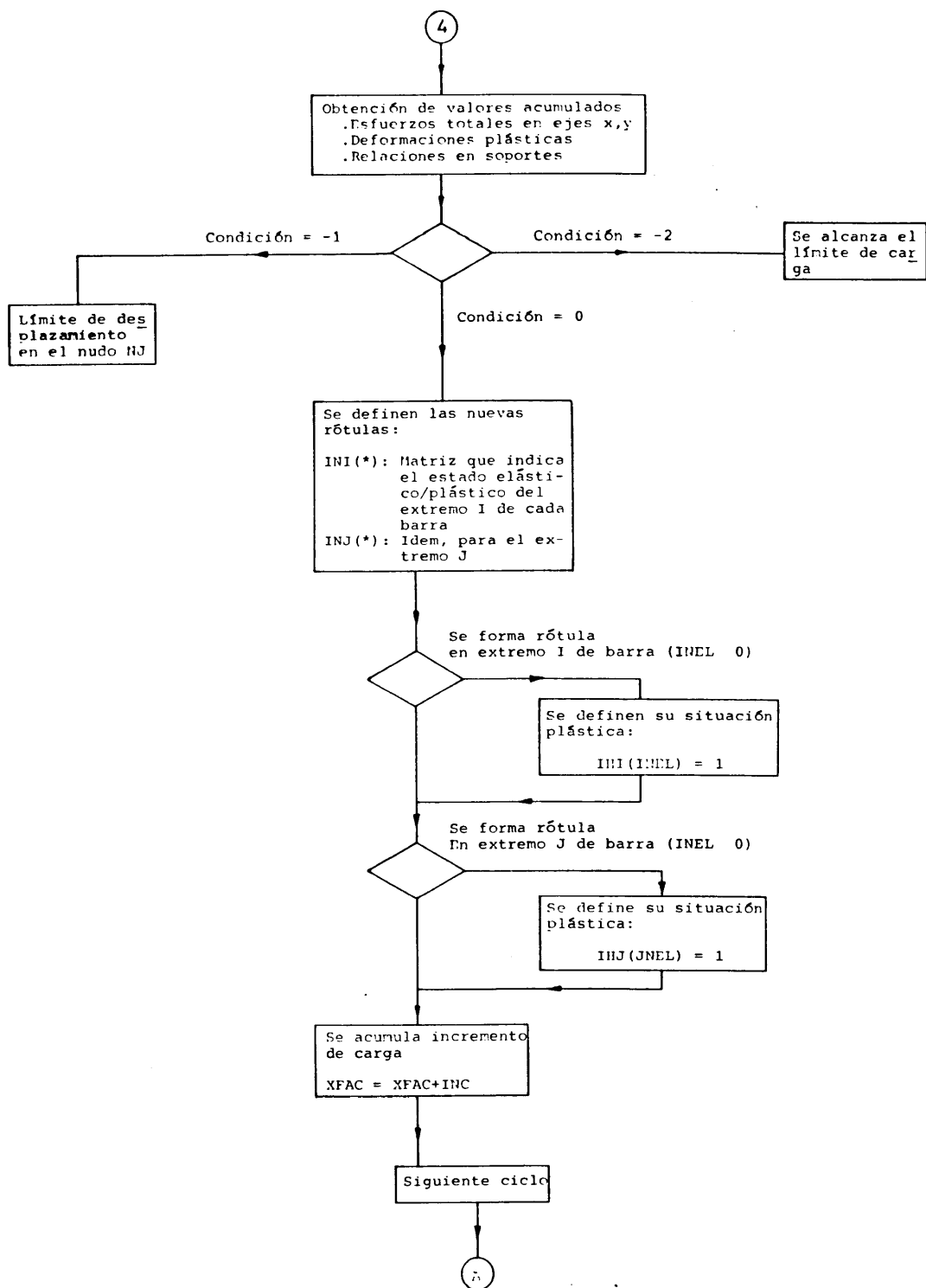


Fig. 19. Diagrama de flujo.

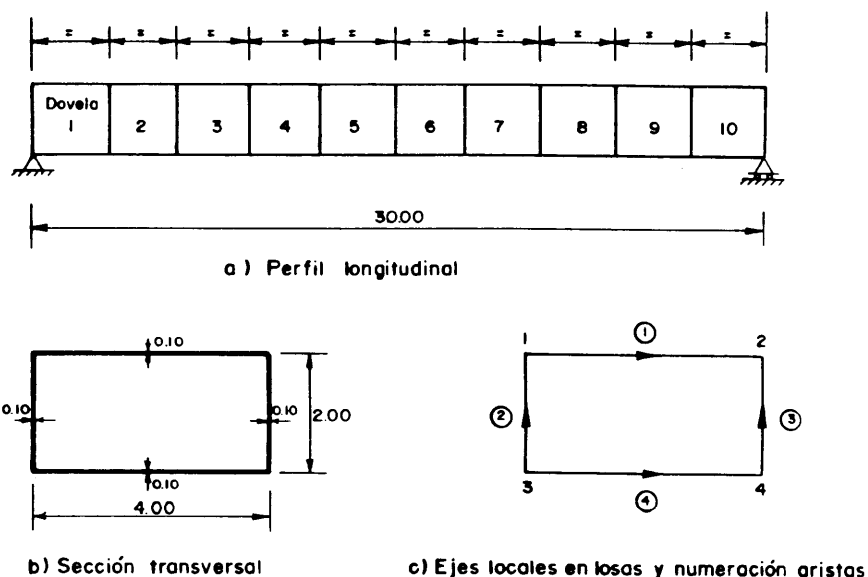


Fig. 20. Ejemplo ilustrativo. Geometría.

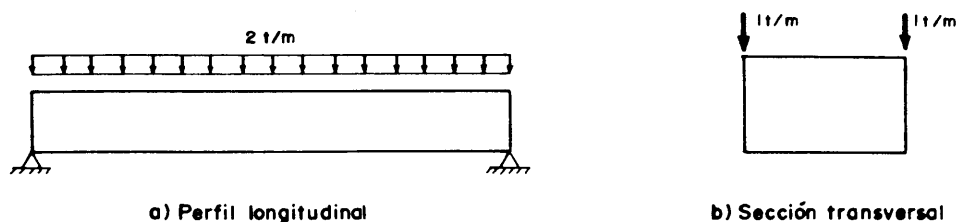


Fig. 21. Ejemplo ilustrativo. Acciones exteriores.

La estructura se discretiza en 10 dovelas, tal como queda reflejado en la figura 20.a.

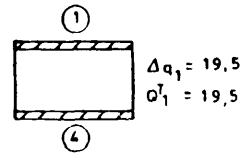
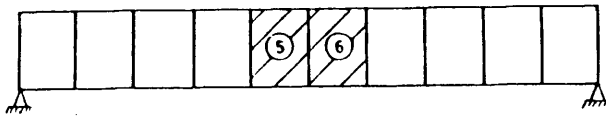
Se considera como acción exterior un cuchillo de carga de 1 t/m que actúa a todo lo largo de las aristas 1 y 2 (figura 21).

Durante el proceso de cálculo no se limita el número de ciclos ni el valor máximo de la carga externa. La única limitación impuesta corresponde a la ductilidad, para la cual se ha adoptado un valor suficientemente alto –15–, tanto en el cálculo longitudinal como en el transversal, a fin de poder comparar los resultados numéricos alcanzados con los deducidos a partir de un cálculo manual.

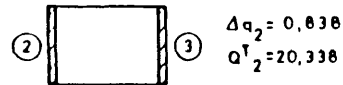
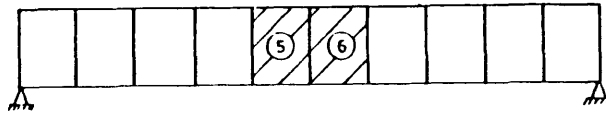
Se adopta para el “radio” que determina el intervalo de plastificación simultánea un valor de 0.2.

En la figura 22 se representa, de forma esquemática, la evolución histórica de la estructura para los sucesivos escalones de carga, a través de los cuales se aplica la carga total necesaria para provocar la supuesta ruina de la estructura cuando una rótula plástica alcance el límite de ductilidad.

INCREMENTO DE CARGA - 1

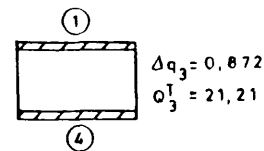
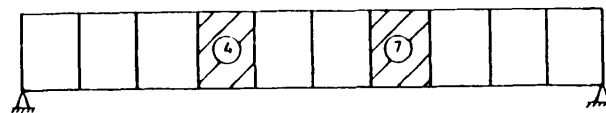


INCREMENTO DE CARGA - 2



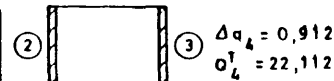
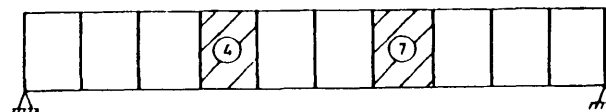
Sección nodal	5				6			
Losa	1	4	1	4	1	4	1	4
Duc. Long.	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50

INCREMENTO DE CARGA - 3



Sección nodal	5				6			
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4
Duc. Long.	5,98	3,99	3,99	5,98	5,98	3,99	3,99	5,98

INCREMENTO DE CARGA - 4



Sección nodal	5				6				4		7	
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4	1	4	1	4
Duc. Long.	10,67	7,11	7,11	10,67	10,67	7,11	7,11	10,67	1,5	1,5	1,5	1,5

INCREMENTO DE CARGA - 5

$$\Delta q_5 = 0,842$$

$$Q_5^T = 22,964$$

Sección nodal	5				6				4				7			
Losa	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Duc. Long.	15	10	10	15	15	10	10	15	5,48	3,65	3,65	5,48	5,48	3,65	3,65	5,48

● Rótula transversal.

 Sección nodal donde se produce la rótula plástica

 Plastificación longitudinal.

Fig. 22. Ejemplo ilustrativo. Resultados.

En los esquemas que representan el estado de la estructura en cada ciclo, se añaden los valores de los resultados correspondientes a dicho escalón a los obtenidos en los ciclos anteriores. También se indica el valor acumulado de la ductilidad en cada una de las rótulas aparecidas hasta ese momento, diferenciándose, según la leyenda, las originadas en el cálculo transversal de las que provienen del longitudinal.

Los resultados obtenidos se pueden comparar con los provenientes de considerar la estructura como una viga de longitud $L = 30.00$ m. En ese caso, el momento de plastificación, M_p^0 , viene dado por (figura 23):

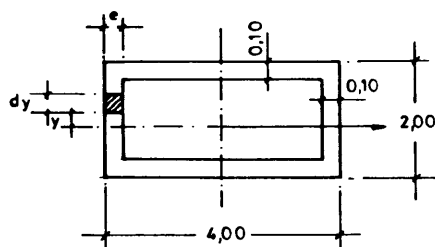


Fig. 23. Momento plástico de la sección.

$$M_p^0 = \int_0^1 (e y \, dy) \sigma_F = 4 \times 0,2205 \times 5000 = 4410 \text{ mt}$$

Si se integran las tensiones normales obtenidas en el cálculo plástico mediante computador para la sección nodal de la dovela 5, se obtiene un momento de valor: $M_p^1 = 4840.5$ mt, que supone un exceso del 9.7 por 100 respecto al momento de plastificación teórico anterior. La aproximación alcanzada es bastante buena y el exceso que aparece admite una sencilla justificación, si se tiene en cuenta que el valor de M_p^0 ha sido obtenido bajo la hipótesis de material elastoplástico perfecto, por lo que, una vez alcanzada la tensión de fluencia, ésta no es superada en ningún caso. Sin embargo, en el cálculo longitudinal como lámina plegada se adopta un modelo plástico con endurecimiento a la deformación, lo cual permite a la sección seguir aumentando sus tensiones aun cuando se haya alcanzado el mencionado límite de fluencia.

6. ANALISIS PARAMETRICO

6.1. Influencia del tipo de carga

Con objeto de obtener información acerca del proceso de redistribución de esfuerzos y tensiones que supone el cálculo plástico de una estructura, ha parecido adecuado estudiar un ejemplo sencillo. Para ello se ha considerado una viga de sección transversal cajón, cuyas dimensiones, así como la distribución transversal de la carga exterior actuante, se modifican. De esta forma, es posible analizar la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la respuesta plástica de la estructura y evaluar su importancia relativa.

Si bien el estudio se centra en un caso concreto y simple, con él se intenta ilustrar acerca de las ventajas que supone la aplicación juiciosa del procedimiento a otros tipos estructurales más complejos, para comprender su comportamiento último en rotura. Por otra parte, muchos de los resultados obtenidos en este ejemplo pueden ser extendidos directamente a otros tipos de estructuras.

A fin de estudiar la influencia de la geometría de la lámina plegada, así como del tipo de carga, en los resultados del análisis, se ha calculado la estructura cuyas características se muestran en la figura 24, para la cual se ha considerado una discretización en cinco dovelas.

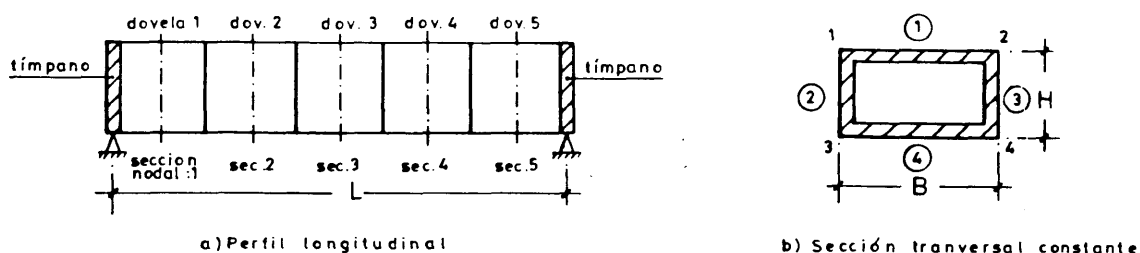


Fig. 24. Análisis paramétrico. Geometría.

Con objeto de comprobar el comportamiento de la estructura anterior ante diferentes situaciones de carga, se han adoptado inicialmente las siguientes dimensiones:

$$L = 30.00 \text{ m} ; B = 8.00 \text{ m} ; H = 2.00 \text{ m}.$$

Espesores (*) de membrana (e_m) y de placa (e_p) de las losas 1 y 4: 0.225 m; e_m y e_p de las losas 2 y 3: 0.30 m. Por último, $E_p = 0.01 E_e$.

Se han analizado dos situaciones de carga de valor total igual en ambos casos (figura 25):

- Carga uniforme a todo ancho en la losa 1: $p = 1 \text{ t/m}^2$.
- Cuchillo de carga en la arista 1: $q = 8 \text{ t/m}$.

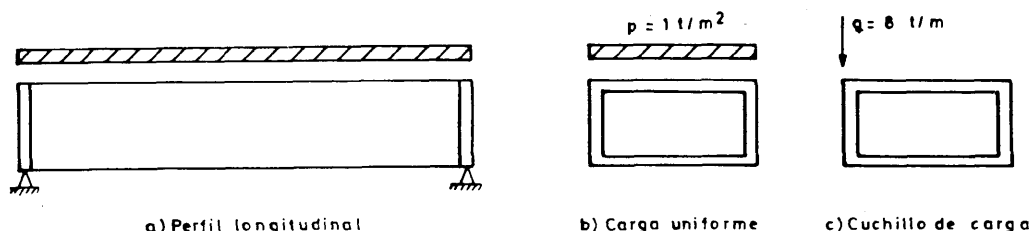


Fig. 25. Análisis paramétrico. Cargas.

Ambas cargas se han incrementado desde los valores iniciales anteriores hasta alcanzar el colapso de la estructura, habiendo considerado una ductilidad máxima de 15, tanto transversal como longitudinalmente, con objeto de analizar la evolución de la lámina ante sucesivas plastificaciones.

Nota (*) e_m simula el espesor que transmite las tensiones axiales longitudinales. Por otra parte, e_p corresponde al canto con que la sección resiste a la flexión transversal. En el caso de una sección con "costillas" o nervios de refuerzo, e_m corresponde al espesor del área media y e_p al de una sección rectangular con inercia a flexión equivalente.

A continuación se especifican con cierto detalle los resultados deducidos para cada uno de los incrementos de carga.

— Carga uniforme: $p = 1 \text{ t/m}^2$.

TABLA 1

Escalón de carga	Incremento de carga	Carga total, P^T	Tipo de plastificación	Sección nodal de ocurrencia	Losa	Extremo	Ductilidad alcanzada
1	12,50 p	12,50 p	Transversal	1-2-3-4-5	1	1-2	—
2	2,97 p	15,47 p	Transversal	1-2-3-4-5	1	CL	8,2

Se llega a la rotura debido a la formación de un mecanismo transversal, para una carga total de valor 15.47p y una ductilidad de 8.2. En la figura 26 se esquematizan los resultados obtenidos.

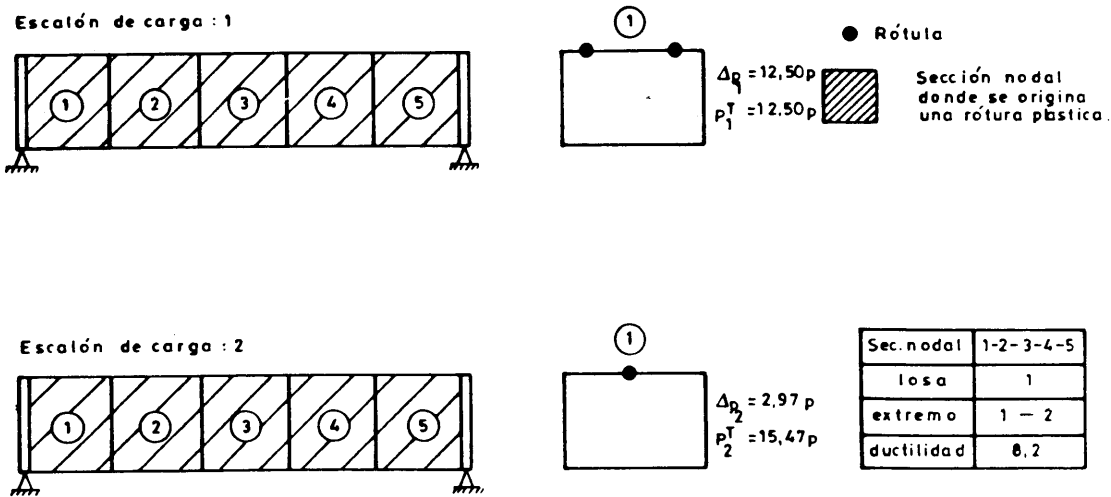


Fig. 26. Análisis paramétrico. Resultados (carga uniforme).

– Cuchillo de carga: $q = 8 \text{ t/m}$.

TABLA 2

Escalón de carga	Incremento de carga	Carga total, Q^T	Tipo de plastificación	Sección nodal de ocurrencia	Losa	Extremo	Ductilidad alcanzada
1	16,60 q	16,60 q	Transversal	3	1-4	1-2	—
2	1,89 q	18,49 q	Longitudinal	3	1-4	—	3,08
3	0,41 q	18,90 q	Longitudinal	3	2	—	3,40
			Transversal	2-4	1-4	1-2	3,40
4	0,60 q	19,50 q	—	—	—	—	15,00
4	0,99 q	19,89 q	Transversal	1-4	1-4	1-2	> 15,00

En la figura 27 se muestran, de forma esquemática los resultados obtenidos en los sucesivos escalones de carga. Se observa (figura 27.a) que, al seguir incrementando la carga desde $Q^T = 18.89 \text{ q}$, se alcanza la ductilidad máxima, con el mismo mecanismo de plastificación, al llegar al nivel $Q^T = 19.50 \text{ q}$. Si no existiese este límite de ductilidad, el mecanismo siguiente de plastificación sería el indicado en la figura 27.b. Los resultados de las ductilidades se muestran en la figura 27.c.

De los resultados obtenidos en este segundo caso de cuchillo de carga, se observa la aparición de dos tipos de plastificación —longitudinal y transversal—, para los sucesivos incrementos de dicho cuchillo.

Si se comparan ambos casos de carga, se comprueba que la situación primera (carga uniforme) resulta, para las mismas características geométricas y resistentes de la estructura, más desfavorable. El material no se aprovecha al máximo, debido a la formación de un mecanismo transversal de rotura que impide alcanzar la ductilidad límite impuesta.

Se ha procedido a una sencilla comprobación de los anteriores resultados, consistente en comparar el momento flector plástico global (M_p^0) de la estructura considerada como una viga de luz L , obtenido en la hipótesis de material elastoplástico perfecto, con el momento M_p^1 deducido en cada caso de la teoría de lámina plegada, mediante integración de las tensiones longitudinales en la sección central.

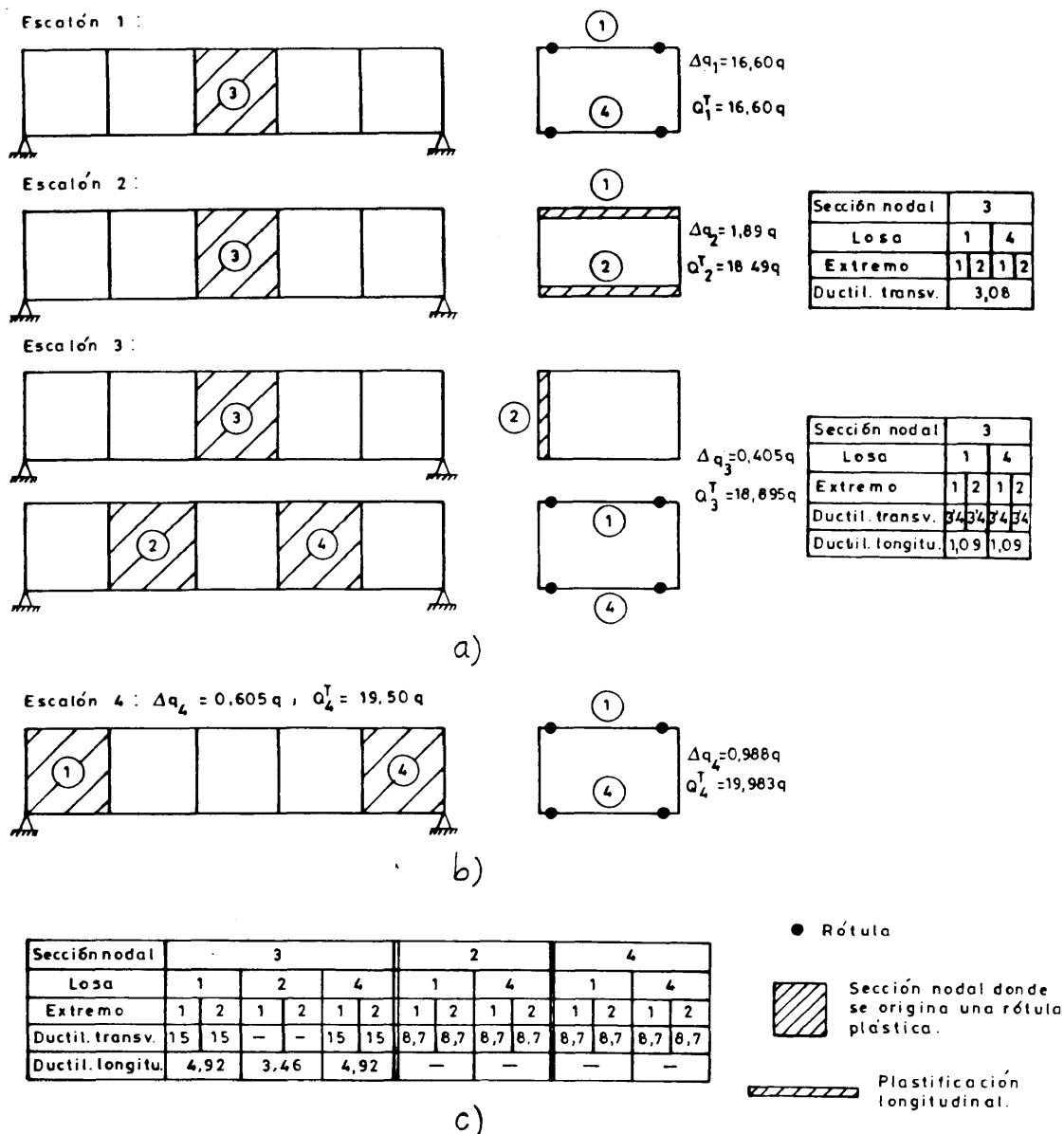


Fig. 27. Análisis paramétrico. Resultados (cuchillo de carga).

Se obtiene:

a) Viga:

$$M_p^0 = 2 \left(\int_0^{H/2} ey \, dy \right) \sigma_F = 2 \times 1,95 \times 5.000 = 1,95 \times 10^4 \, \text{m}$$

b) Lámina plegada:

— Carga uniforme: $M_p^1 = 1,5 \times 10^4 \, \text{mt}$

— Cuchillo de carga: $M_p^1 = 1,8 \times 10^4 \, \text{mt}$

La aproximación entre los valores de M_p^1 y M_p^0 es relativamente buena para el caso de cuchillo de carga. La pequeña diferencia existente puede ser explicada por la aparición de un momento torsor y por las limitaciones impuestas al factor de ductilidad.

El menor valor de M_p^1 para el caso de carga uniforme es razonable, ya que el tipo de colapso producido en la estructura viene determinado por la formación del mecanismo transversal de rotura, que no es captado en un análisis elemental como viga de la lámina plegada.

La evolución de las diferentes magnitudes de interés en el cálculo (esfuerzos de laja y placa, y movimientos), a medida que se producen las sucesivas plastificaciones, se representa en los gráficos siguientes. Estas magnitudes se definen en la figura 28, en donde se indican las secciones nodales en las que se han obtenido los distintos resultados.

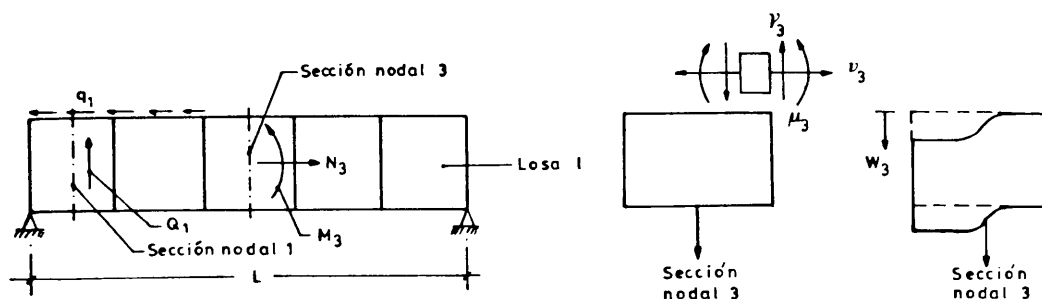


Fig. 28. Análisis paramétrico. Definición de los resultados.

En la figura 29 se muestran los esfuerzos longitudinales (membrana), para diferentes losas, en la sección nodal 3 (M_3, N_3) y en la sección nodal 1 (Q_1), para ambas situaciones de carga: uniforme y cuchillo. En abscisas se representan los valores adimensionales (fracciones de la carga total en cada escalón):

$$P_i = P_i^T/p; Q_i = Q_i^T/q$$

Se han señalado con un círculo los puntos correspondientes a aquellos valores característicos para los que se produce una plastificación, ya sea longitudinal ya transversalmente. La interpretación de los gráficos se realiza de acuerdo con los valores definidos en las figuras 26 y 27.

En la figura 30 se han dibujado las gráficas correspondientes a los rasantes, q_1 (sección nodal 1) y esfuerzos transversales, μ_3, γ_3 y v_3 (sección nodal 3) y, finalmente, en la figura 31 se indican los valores de los movimientos verticales de las aristas, w_3 , en la sección nodal 3.

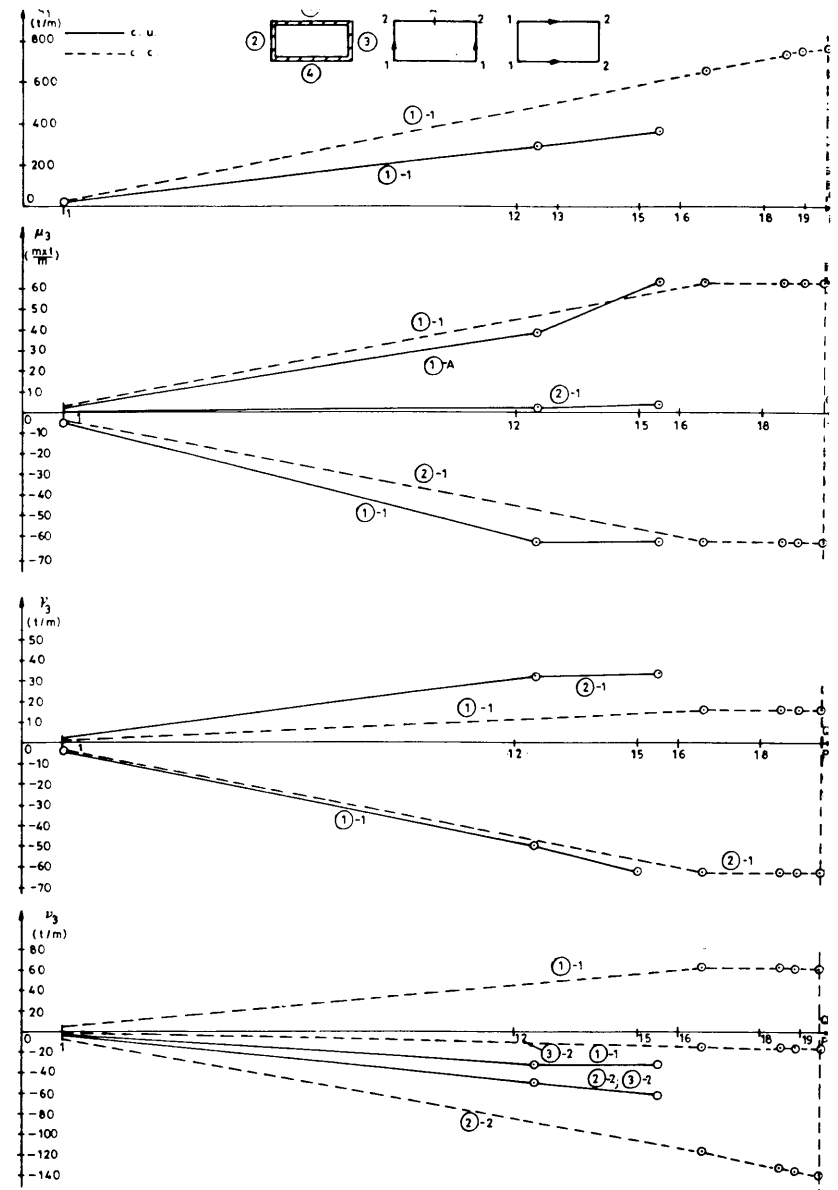
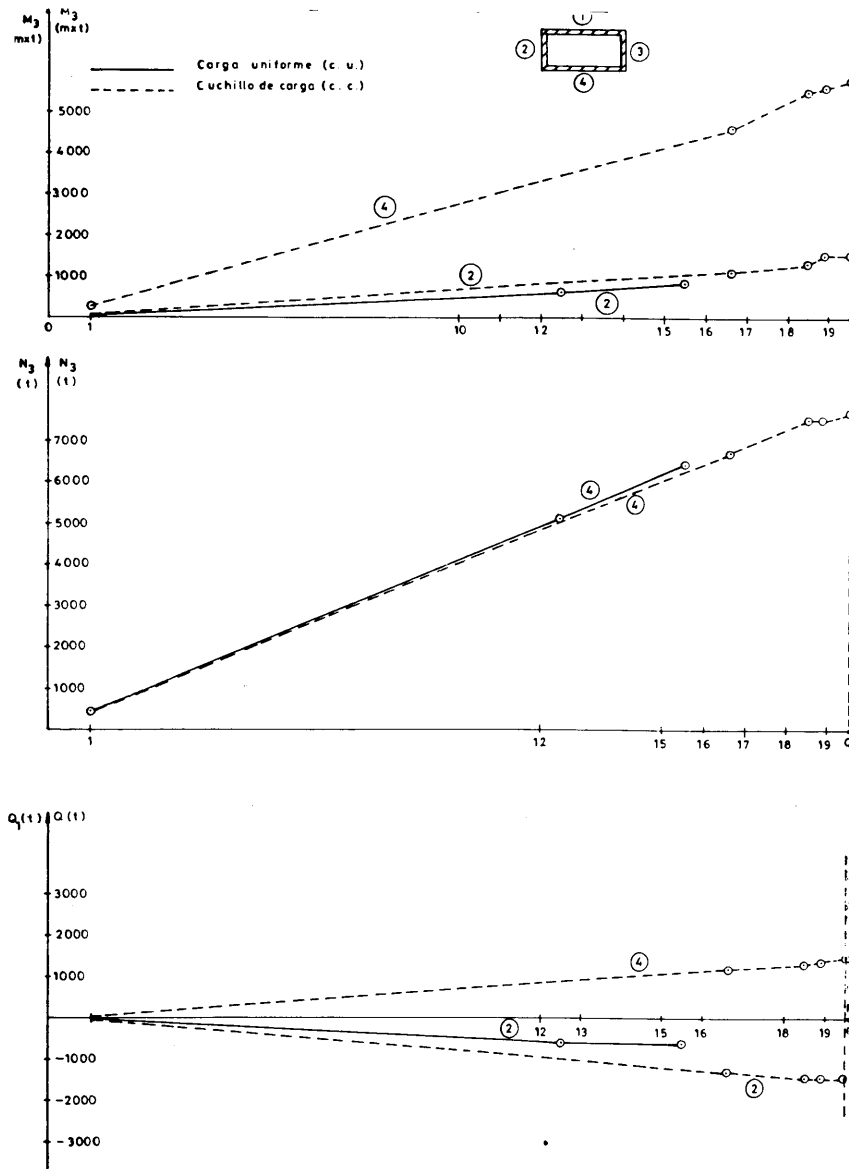
Se comprueba de nuevo que la formación del mecanismo de rotura transversal, en el caso de acción uniforme, reduce sensiblemente el valor de la carga de agotamiento de la estructura.

La plastificación de una sección según el criterio de fluencia dado por la expresión:

$$\left[\frac{M}{M_p} \right] + \left[\frac{N}{N_p} \right]^2 = 1$$

queda claramente reflejada en las relaciones existentes entre los diagramas de momentos y de axiles (longitudinal y transversalmente). Asimismo, en el caso de plastificación longitudinal, la sección aún puede admitir incrementos en los valores de los esfuerzos, debido, como es natural, a la relación constitutiva considerada; en otros términos, debido al valor $E_p = 0.01 E_e \neq 0$. Sin embargo, para la plastificación transversal y dado que se ha tomado $E_p = 0$, una vez alcanzada ésta no son posibles nuevos incrementos, lo cual queda reflajado en los correspondientes tramos de la figura 30.

Por último, y en lo que se refiere a las flechas alcanzadas en rotura, se observa que, para situaciones muy cercanas a aquélla, los valores aproximados de 30 cm suponen un 1 por 100 de la luz de la viga, por lo que la hipótesis de linealidad geométrica podría considerarse todavía válida.



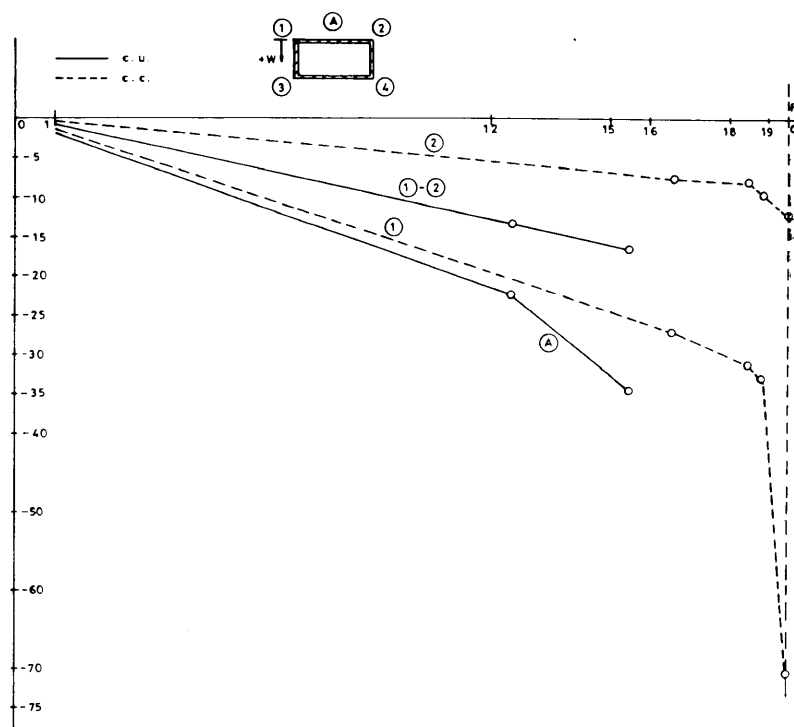


Fig. 31. Evolución de las flechas en diferentes puntos de la sección centro-luz.

6.2. Influencia de la geometría

Con objeto de alcanzar una mejor comprensión del mecanismo de redistribución de esfuerzos por la plastificación de las distintas secciones, se ha efectuado un análisis adicional; en dicho análisis la estructura considerada ha sido la representada en la figura 24, pero variando la dimensión B , habiéndose adoptado $B=4.00, 6.00, 8.00, 10.00$ y 12.00 metros. Se han estudiado los dos tipos de carga ya mencionados: uniformemente repartida de valor $p = 1 \text{ t/m}^2$ sobre la losa 1, y cuchillo de carga sobre la arista 1, de valor $q = p \times B \text{ t/m}$.

Con objeto de que los resultados alcanzados sean comparables, se ha mantenido la inercia a flexión de la sección total, lo cual se ha llevado a cabo conservando $H = 2.00 \text{ m}$ y el espesor de las losas 2 y 3 igual a 30 cm . Por lo tanto, se ha aumentado o reducido el espesor de las losas 1 y 4, de acuerdo con el valor de B , a fin de que el área de 1.80 m^2 de la sección transversal de dichas losas permanezca constante.

En la figura 32.a se ha representado la carga total de rotura en ambas situaciones: acción uniforme, P_f^T , y cuchillo de carga, Q_f^T , en función, en ambos casos, del ancho B . Se observa que el valor $B = 6.50 \text{ m}$ corresponde a un punto crítico; para valores mayores de 6.50 m , la carga de colapso es superior bajo la actuación del cuchillo de carga, a pesar de la desnivelación de aristas que en dicho caso se produce. Ello es debido a la formación del mecanismo de rotura transversal que, para valores de B suficientemente grandes, y en el caso de acción repartida, es determinante en la resistencia última de la sección.

Por el contrario, para valores de B comprendidos entre 5.00 y 6.50 m , es el cuchillo de carga el que determina la carga de rotura.

Cuando $B < 5.00$, la deformabilidad de la sección influye poco en los resultados, dado que la estructura se aproxima cada vez más a una viga y ambas situaciones de carga conducen al mismo valor de la carga última.

Así pues, dos conclusiones se deducen de forma inmediata: Por una parte, existe un valor de B crítico ($B = 6,50$ m, en este caso), para el cual la relación $Q_f^T/P_f^T = 1$ (figura 32.b); es decir, la carga última es la misma, ya se trate de acción repartida, ya de un cuchillo de carga. Para valores de B superiores al crítico ($B > 6,50$ m) se está infrautilizando el material en el trabajo de membrana de las diferentes losas, ya que el mecanismo de rotura por flexión transversal es el que determina la carga de colapso.

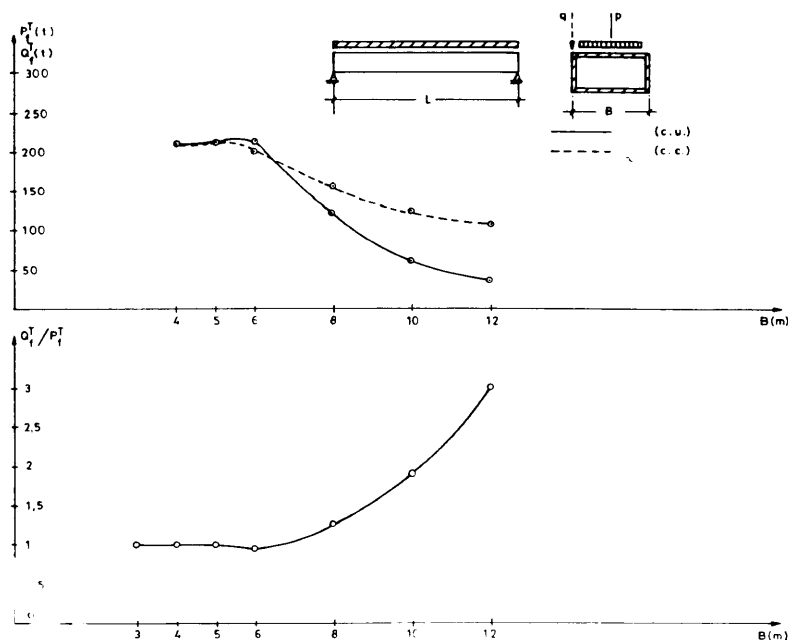


Fig. 32. Carga de colapso en función del ancho B .

6.3. Optimización estructural

Una forma usual de obviar la infrautilización de material señalada en el apartado anterior consiste en considerar diferentes espesores de membrana (e_m) y de placa (e_p), que se materializan en la práctica mediante la utilización de rigidizadores o costillas transversales, que mantienen la rigidez a flexión transversal dentro de los límites requeridos, sin afectar a las características resistentes longitudinales.

Un modo de optimizar la sección consiste en encontrar la relación de espesores e_m/e_p para la cual las roturas longitudinal y transversal se producen simultáneamente.

A fin de simplificar el costoso análisis que implica el objetivo anterior, se ha determinado aquí la relación e_m/e_p para la cual la primera plastificación longitudinal se verifica de modo simultáneo a la primera plastificación transversal. Ello resulta suficiente a efectos prácticos, pues se ha comprobado en la mayor parte de los casos analizados que, en la situación más desfavorable, el primer incremento de carga representa el 90 por 100 de la carga de rotura.

Así pues, y para ese primer incremento, la relación óptima e_m/e_p de plastificación simultánea puede determinarse siguiendo dos procedimientos: 1) Fijando e_p y variando e_m ,

lo que tiene mayor sentido para valores pequeños de B ($5,00 < B < 6,50$), para los cuales la plastificación longitudinal es determinante, o bien, 2) fijando e_m y variando e_p —situación usual en la práctica—, que tiene sentido, en este caso particular, para $B > 6,50$ m, cuando es dominante el mecanismo transversal.

Ejemplos ilustrativos de ambas posibilidades, para los diferentes valores de B , se muestran en las figuras 33 y siguientes, que serán comentadas seguidamente. Con objeto de que los resultados obtenidos puedan ser comparados adecuadamente, y tal como se ha explicado en el apartado anterior, se mantienen constantes el canto $H = 2,00$ m y los espesores de las losas 2 y 3 (iguales a 30 cm), y se varía el espesor de las losas 1 y 4, de acuerdo con el valor de B , de forma tal que el área de dichas losas permanezca constante ($1,80 \text{ m}^2$, en este caso), o lo que es igual, que se mantenga constante la inercia a flexión de la sección total. En abscisas se toman los valores adimensionales P_i (acción uniforme) y Q_i (cuchillo), correspondientes a sucesivos incrementos de carga. En ordenadas, los valores de e_p (o e_m), para un valor fijo de e_m (o e_p) y de B . Con las letras T y L se hace referencia a las plastificaciones transversal y longitudinal, respectivamente, para el citado primer incremento de carga.

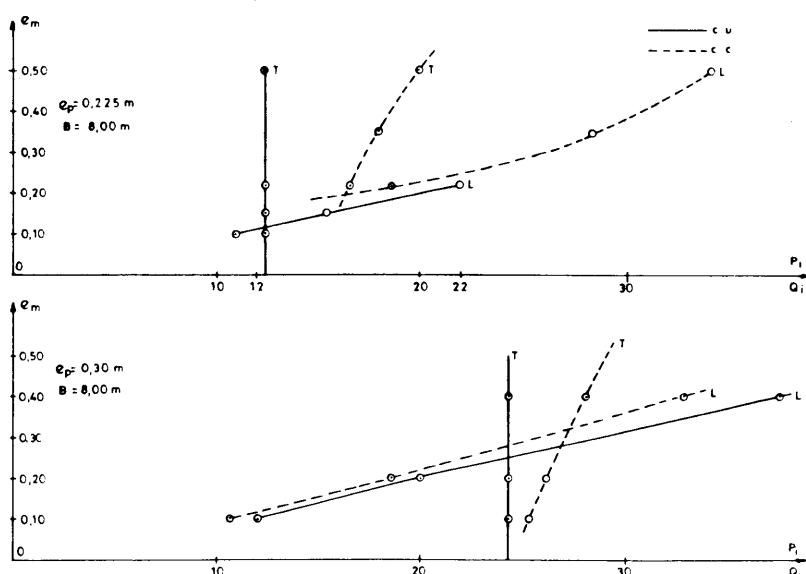


Fig. 33. Influencia de la variación de espesores en la formación de rótulas plásticas.

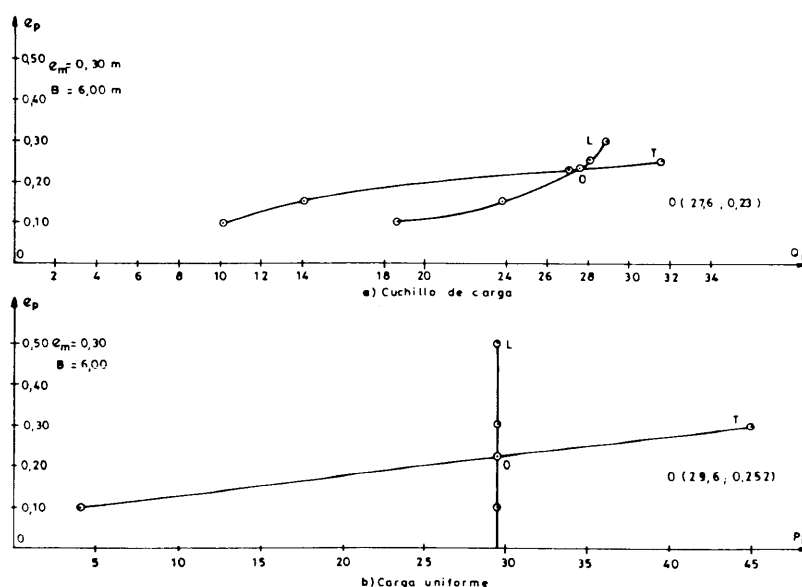


Fig. 34. Influencia de la variación de espesores en la formación de rótulas. ($B = 6.00$ m).

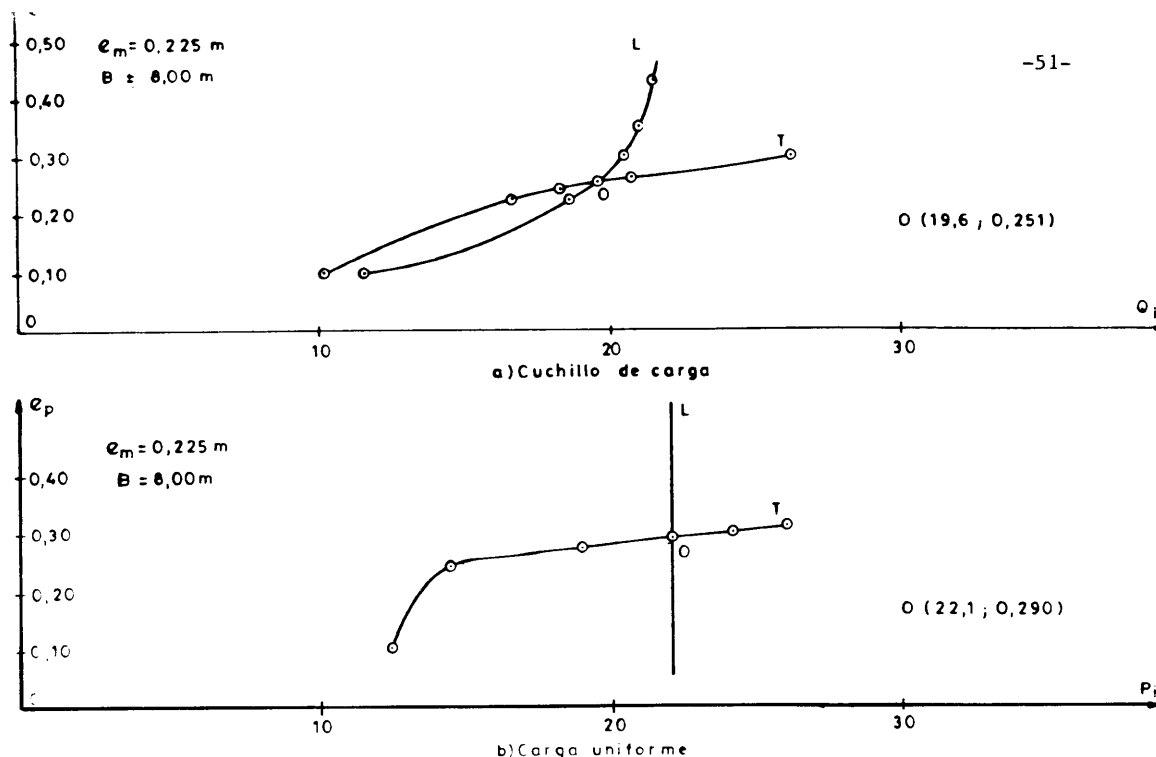


Fig. 35. Influencia de la variación de espesores ($B = 8.00$ m).

En las figuras 33 y 34 se representan los resultados de dos ejemplos cuyo interés es meramente teórico, habida cuenta de los razonamientos referentes a los mecanismos de rotura, anteriormente expuestos. En la primera se ha tomado $B = 8,00$ m y se han fijado los valores de e_p en dos casos (0,225 y 0,30 m), obteniéndose curvas $e_m(P_i)$, $e_m(Q_i)$, en ambas situaciones de carga, que definen en cada caso el valor de e_m para el cual ambos mecanismos de rotura –transversal y longitudinal– se alcanzan simultáneamente.

Análogas consideraciones pueden hacerse sobre la figura 34, salvo que en ese caso se ha mantenido constante $e_m = 0,30$ m, obteniéndose el valor óptimo de e_p .

En las figuras 35, 36 y 37 se representan tres casos de interés práctico, puesto que corresponden a situaciones en las que, manteniendo el espesor de membrana, se pretende obtener el espesor de placa óptimo mediante la introducción de rigidizadores transversales. Dichos casos corresponden a valores de B iguales a 8.00, 10.00 y 12.00 metros.

Dichas figuras admiten una sencilla interpretación; por ejemplo, y por referencia a la figura 35, correspondiente a los valores $B = 8,00$ m y $e_m = 0,225$ m, se obtienen los puntos óptimos O, para los cuales se alcanzan simultáneamente los mecanismos de rotura longitudinal y transversal. Así, en el caso de actuación del cuchillo de carga, el punto óptimo corresponde a un valor $Q_i = 19.6$ y a un espesor de placa $e_p = 0.251$ m. Para la carga uniforme los valores anteriores son, respectivamente, 22.1 y 0.290 m.

Tanto en este caso, como para $B = 10,00$ m se observa que $e_p > e_m$, es decir, que es necesario introducir rigidizadores a fin de aumentar el espesor de flexión.

A la izquierda del punto O el tipo de rotura viene marcado por el mecanismo transversal, mientras que a la derecha de dicho punto la rotura determinante es la longitudinal, al haber introducido una mayor rigidización que la estrictamente necesaria.

Se observa asimismo que en el caso de carga uniforme la rotura longitudinal es independiente del valor de e_p , es decir, una vez alcanzado el punto óptimo de rotura, el aumento de rigidización transversal no influye en la carga de colapso, que permanece constante, viniendo determinada por el mecanismo longitudinal. Ello puede ser explicado por la no aparición de

deformación torsional, dada la simetría existente, lo que conduce a un agotamiento de las almas en su trabajo como vigas cargadas en su plano, para las cuales se ha mantenido constante el espesor.

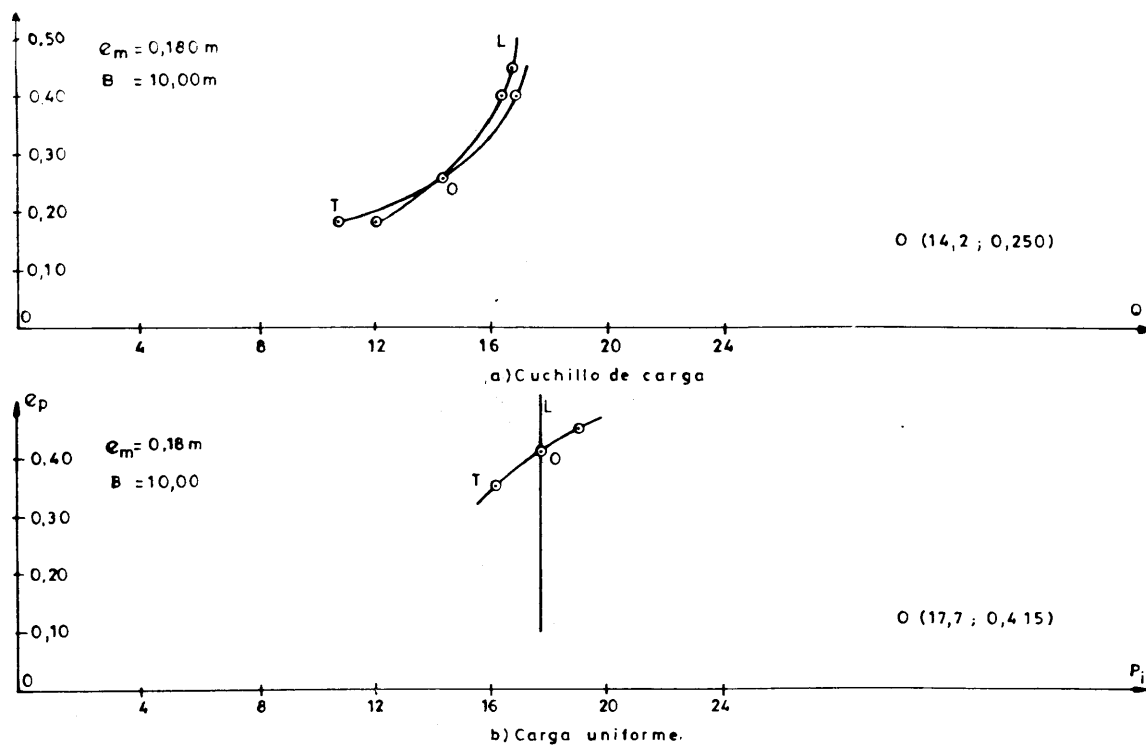


Fig. 36. Influencia de la variación de espesores ($B = 10.00 \text{ m}$).

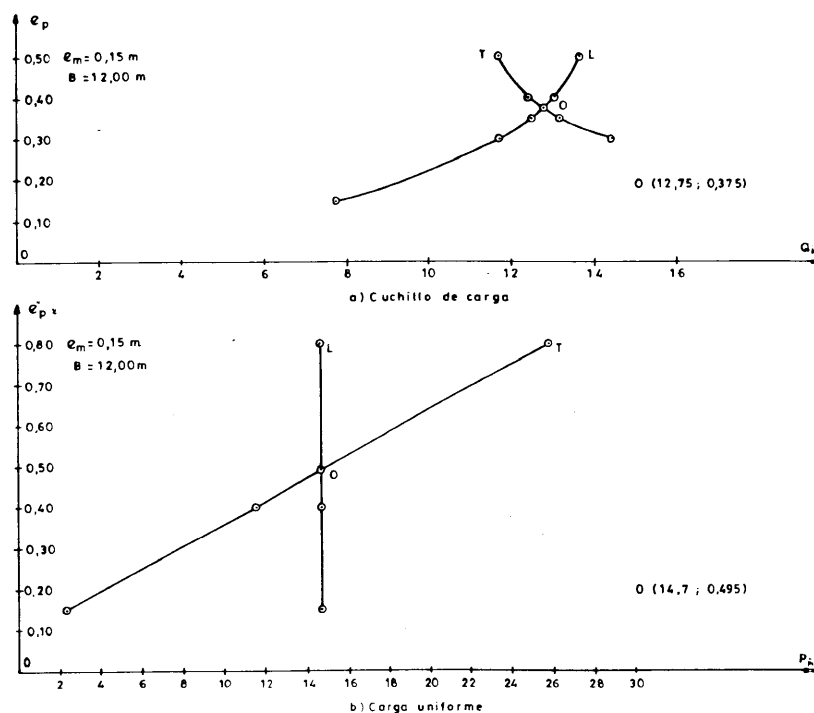


Fig. 37. Influencia de la variación de espesores ($B = 12.00 \text{ m}$).

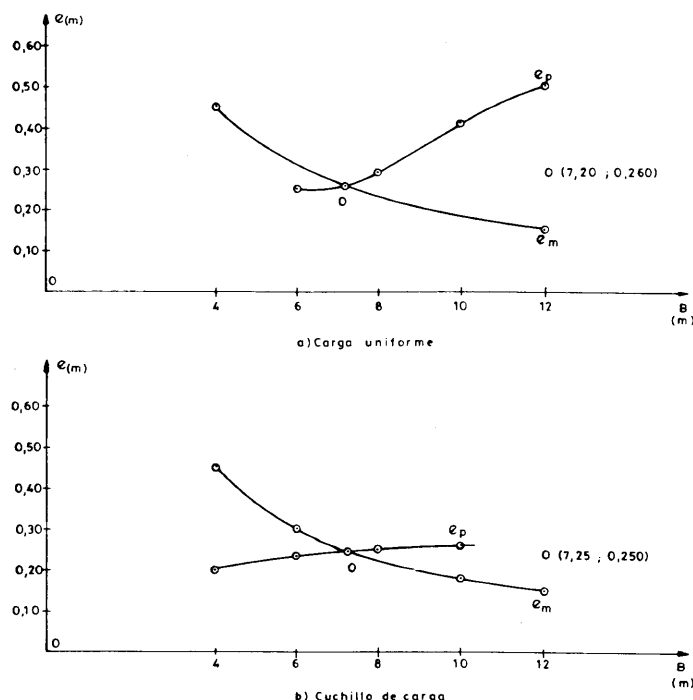


Fig. 38. Obtención de la separación óptima.

Por otra parte se comprueba que las cargas de colapso para la actuación del cuchillo de carga son menores que en el caso de carga uniforme, si bien también son menores los espesores de flexión a introducir. Esta circunstancia puede ser explicada por el hecho de que, una vez alcanzado el punto óptimo de rotura simultánea, la distorsión de la sección sigue siendo determinante en el colapso de la estructura, cuyo fallo se produce por rotura de las losas superior e inferior, y no por la alma.

Para un valor de $B = 12.00$ m (figura 37.a), y en la hipótesis de actuación del cuchillo de carga, aparece una situación peculiar, ya que el tipo de rotura predominante es longitudinal (mecanismo de membrana), por fallo del alma directamente cargada (losa 2). Sin embargo, en este caso el primer escalón de carga representa únicamente el 79 por 100 de la carga de colapso, por lo que las conclusiones que puedan derivarse del cálculo anterior deben ser aceptadas con cierta reserva.

El análisis anterior permite un diseño racional de las estructuras láminas plegadas. En efecto, para cada valor del ancho B se pueden obtener los espesores de placa y membrana correspondientes, que garantizan la plastificación simultánea transversal y longitudinalmente. Sean estos valores $e_p(B)$ y $e_m(B)$, respectivamente. Evidentemente, desde este punto de vista, el valor más adecuado para la separación B entre almas sería aquél para el cual $e_p(B) = e_m(B)$, en caso de no considerar la complicación constructiva de las costillas transversales (losas homogéneas e isotropas).

En la figura 38 se muestran curvas que permiten deducir dicha separación óptima para ambas situaciones de carga: uniforme y cuchillo. Es importante señalar que los valores óptimos de B y e , para los cuales se producen simultáneamente las roturas longitudinal y transversal, coinciden en este caso en ambas situaciones de carga, o lo que es igual, la rotura óptima es independiente del tipo de carga y sólo depende de las características geométricas.

La conclusión anterior adquiere una singular importancia desde el punto de vista práctico, puesto que permite un diseño óptimo de la lámina plegada, independientemente del tipo de carga a que vaya a estar sometida, si bien, obviamente, la intensidad que para la misma se adopte en el diseño será determinante en la seguridad estructural.

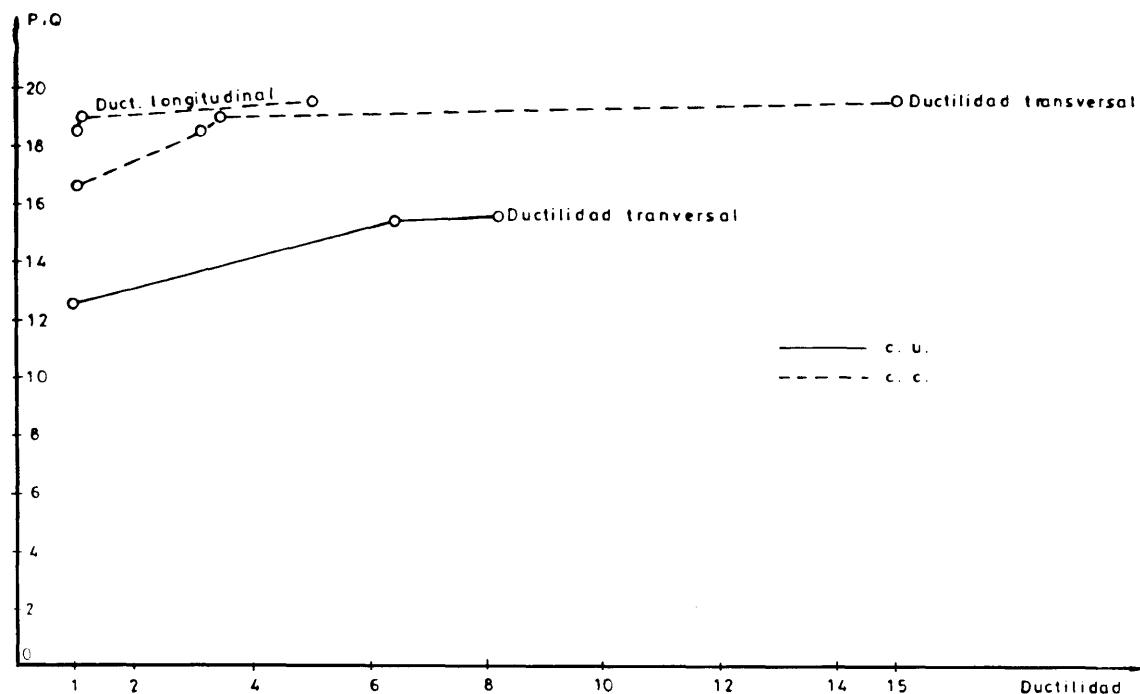


Fig. 39. Carga de colapso en función de la ductilidad.

6.4. Influencia de la ductilidad

Con objeto de estudiar la influencia de la ductilidad en diferentes parámetros de interés en el cálculo, se ha procedido, en primer lugar, al análisis de la estructura de la figura 24; para la separación $B = 8.00$ m, bajo las situaciones de carga ya mencionadas (figura 25), y suponiendo distintos valores del factor de ductilidad. Los espesores e_m y e_p considerados corresponden a los del apartado 6.1.

En las figuras 39 y 40 se muestran, respectivamente, las relaciones entre la carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Para las cargas de colapso se han tomado los coeficientes adimensionales $P = P^T/p$ (carga uniforme) y $Q = Q^T/q$ (cuchillo). Para la flecha máxima se considera el factor adimensional $w_{m \acute{a}x}/luz$, en tanto por mil.

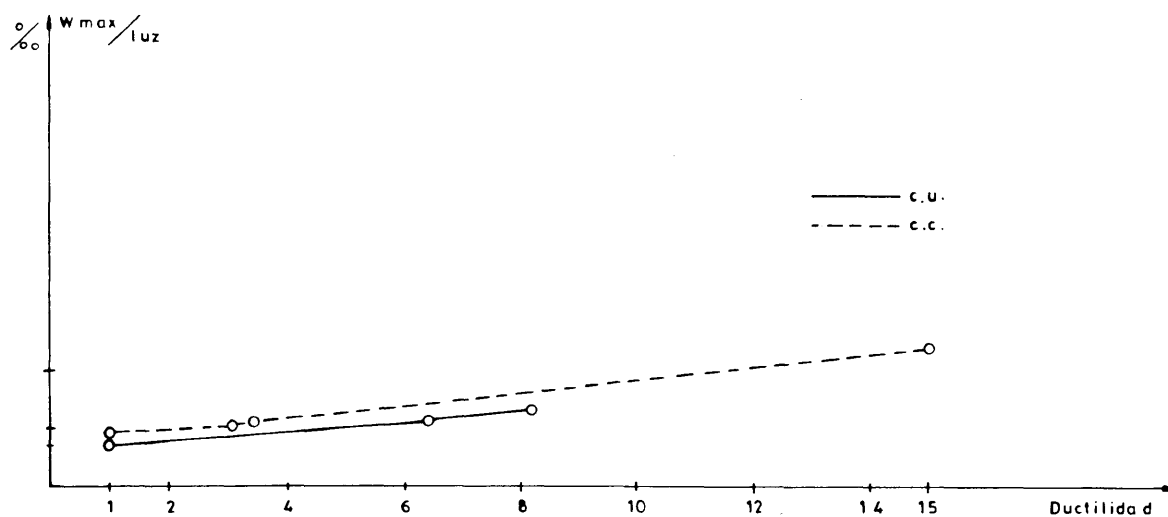


Fig. 40. Flecha máxima en función de la ductilidad.

Se observa, una vez más, la trascendencia del modo de rotura en los valores de la carga de colapso y flecha máxima. Así, en este caso concreto, la formación del mecanismo transversal provoca el fallo estructural para una ductilidad máxima de 8.2.

La interpretación conjunta de ambos gráficos, junto con los representados en las figuras 33 a 38, puede tener gran interés desde el punto de vista práctico de diseño, ya que, simultáneamente a la consideración de rigidización transversal, es posible tener en cuenta diferentes valores de las ductilidades transversal y longitudinal, para, finalmente, de acuerdo con las gráficas de las figuras 29 y 31, proceder al dimensionamiento adecuado de las diferentes losas.

En las figuras 41 y 42 se repite el análisis anterior para las distintas separaciones $B = 4.00, 6.00, 8.00, 10.00$ y 12.00 metros.

En la tendencia de los resultados en flechas (figuras 41.b y 42.b) se observa una variación brusca entre los valores de $B = 6.00$ y 8.00 metros. Ello es debido, como ya se ha descrito, a que entre dichos valores se produce el cambio de configuración de rotura: de longitudinal a transversal.

Finalmente, cabe resaltar el hecho de que para valores prácticos admisibles del factor de ductilidad (del orden de 6.00 en el hormigón armado) las flechas máximas alcanzadas representan porcentajes suficientemente bajos de la luz de la lámina plegada, por lo que la supuesta hipótesis de linealidad geométrica parece aceptable.

7. EJEMPLO DE APLICACION

El ejemplo que se presenta a continuación tiene un carácter marcadamente ilustrativo acerca de la potencialidad de un modelo y programa de computador como el aquí desarrollado, en su aplicación a situaciones reales. Con ese objeto se estudia un puente de sección variable tanto en dimensiones globales como en espesores, y sometido a la actuación de las cargas permanentes y sobrecargas definidas en la Instrucción española.

El análisis tiene como objetivo deducir el nivel de seguridad a la rotura de esta estructura. Sin embargo, a fin de simplificar el análisis, sólo se ha considerado un vano simplemente apoyado sin actuación del pretensado. Es posible, con el sacrificio de un mayor esfuerzo computacional, el cálculo de un tramo continuo en donde se incluya la acción del pretensado, si bien la problemática de mayoración de los esfuerzos procedentes de esta acción constituye un problema más allá del objetivo de este artículo.

En este ejemplo se analiza, como se ha indicado, un tablero de puente de sección cajón no prismática, con condiciones de tímpano en sus extremos y cuya geometría aparece reflejada en la figura 43.

La variación de espesores en almas y forjado inferior se muestra en la figura 44. La definición y numeración de losas y aristas se realiza en la figura 45 y se ha considerado una división en 10 dovelas.

Con objeto de evaluar la seguridad a rotura de la estructura anterior bajo la actuación de las sobrecargas de la Instrucción vigente, se ha calculado bajo las siguientes acciones:

- Peso propio (peso específico 2.5 t/m^3).
- Sobrecarga uniforme de 600 kg/m^2 en el tablero superior (losas 1, 2 y 3) que incluye los efectos de la superestructura (pavimento, barandillas, etc.) y la sobrecarga de la Instrucción.

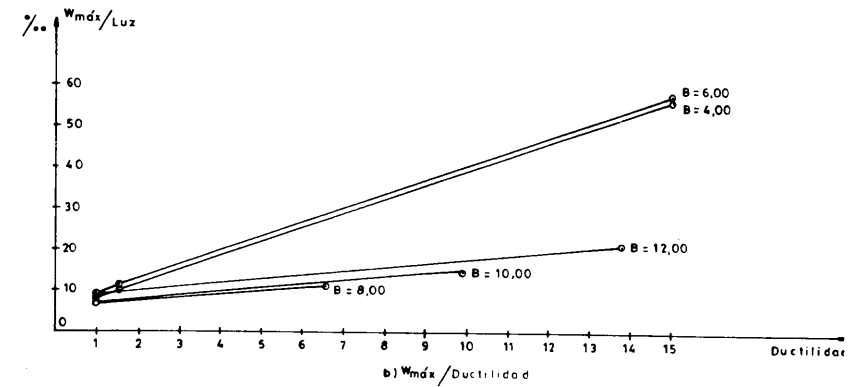
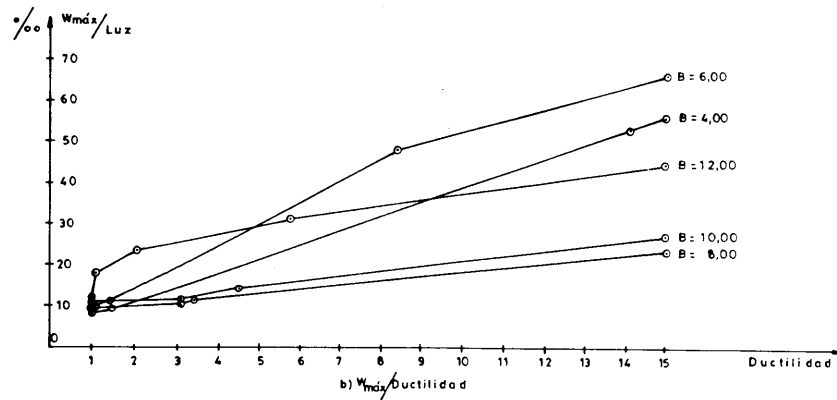
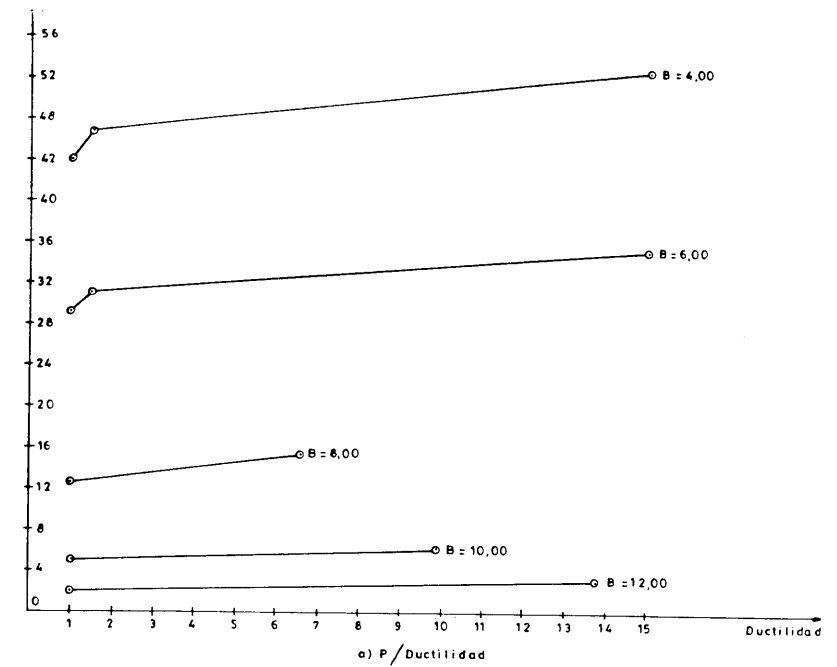
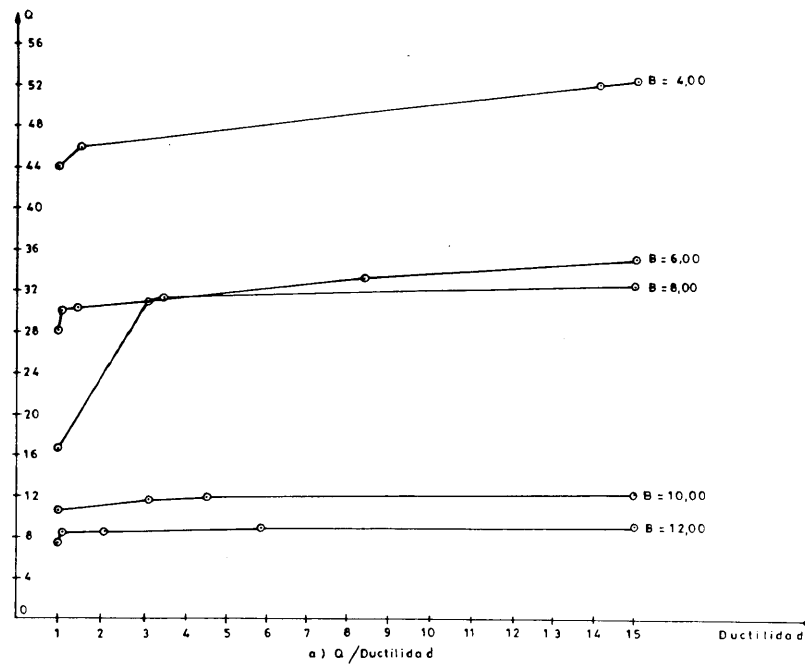


Fig. 41. Relación entre carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Influencia de la geometría (cuchillo de carga).

Fig. 42. Relaciones entre carga de colapso y flecha máxima con la ductilidad. Influencia de la geometría (carga uniforme).

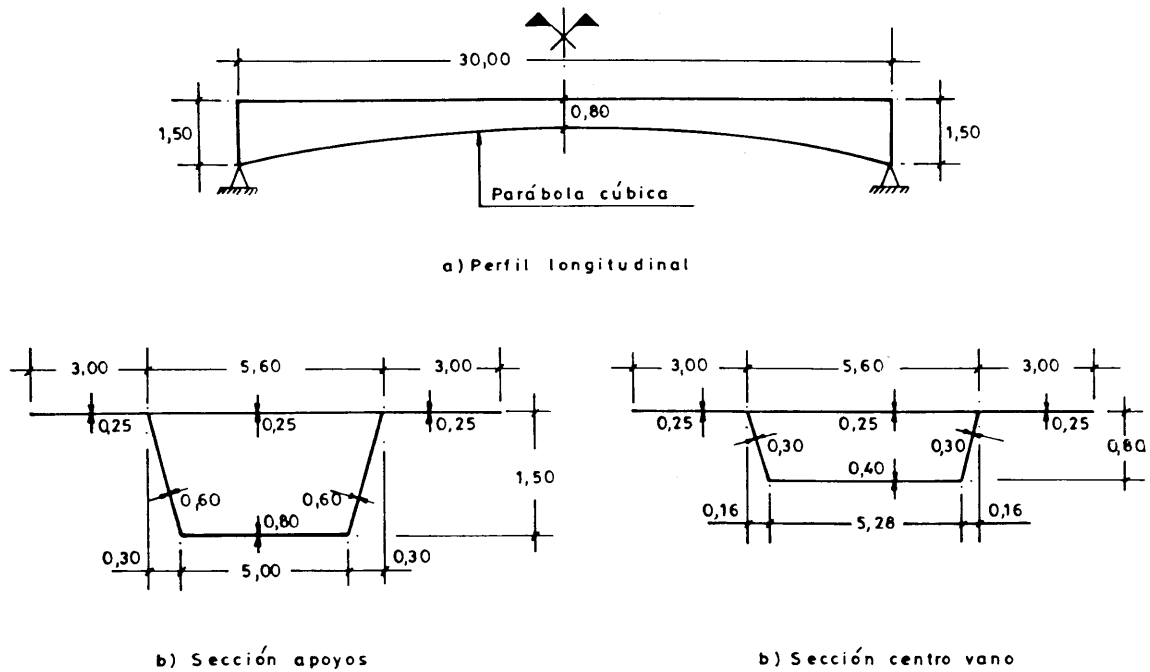


Fig. 43. Ejemplo de aplicación. Geometría.

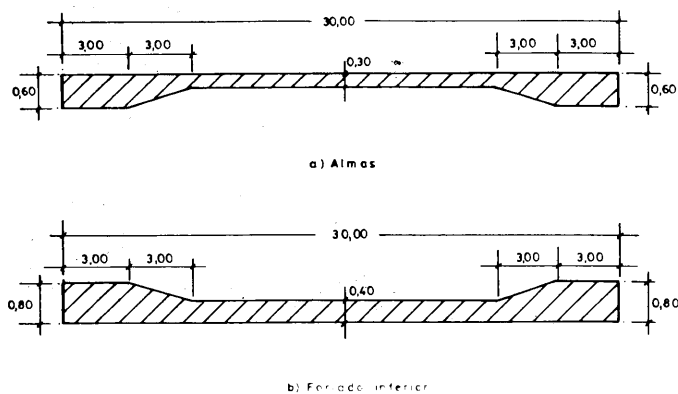


Fig. 44. Ejemplo de aplicación. Espesores.

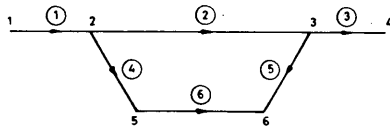


Fig. 45. Ejemplo de aplicación. Topología.

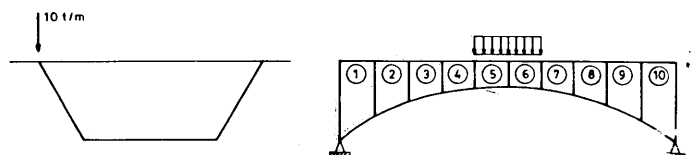


Fig. 46. Ejemplo de aplicación. Cargas.

- Carro de 60 t de la Instrucción, simulado mediante una carga uniformemente repartida de 10 t/m actuando sobre la arista 2, y extendida únicamente a las dovelas 5 y 6 (figura 46).

Como parámetros del cálculo plástico se han adoptado los siguientes:

- Tensión de plastificación: 5.000 t/m².
- Coeficientes de plastificación: 1.50.

- Pendiente del diagrama plástico: $E_p = 0.01 E_e$.
- Número máximo de ciclos del proceso: 6.
- $E_e = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$.
- Ductilidad límite: 15.

Conviene señalar que el alto valor previsto para la ductilidad no afecta excesivamente a la carga de colapso, que se alcanza para el tercer escalón, con un incremento poco significativo respecto al inicial del primer escalón.

En la figura 47 se describe el proceso de plastificación, que se resume en la tabla 3.

TABLA 3

Escalón de carga	Incremento de carga	Valor total	Tipo de plastificación	Dovela	Losa	D_L	D_T
1	3,09 p	3,09 p	Longitudinal	5-6	6	1,00	1,00
2	0,159 p	3,25 p	Longitudinal	5-6	4-5	1,63	1,00
3	0,287 p	3,54 p	Longitudinal	4-7	6	15,00	1,00

Como se observa, todas las plastificaciones que se producen son longitudinales, siendo el valor de la carga de colapso de 3,54 veces el valor inicial adoptado para el cálculo elástico. Este análisis permite definir de un modo más racional el valor usual del coeficiente de seguridad a rotura de la estructura. Conviene señalar, además, que para pasar de la ductilidad 1,63 del segundo escalón al valor 15,00 del tercero únicamente se necesita un incremento de 0,287 p, inferior al 9 por 100 del valor 3,25 p alcanzado en el citado segundo escalón. Ello proporciona un orden de magnitud de las diferencias que se pueden producir al considerar distintas ductilidades entre los valores 1.63 y 15.00.

Finalmente, en la figura 48 se representan los valores de diferentes magnitudes de interés en el cálculo para el estado elástico inicial y el estado de colapso.

8. CONCLUSIONES

Entre las conclusiones derivadas del estudio anterior, se citan a continuación como más importantes, las siguientes:

1. El cálculo plástico constituye un procedimiento fundamental para la evaluación del grado de lejanía del colapso de una estructura. Este concepto de colapso es fuertemente dependiente del tipo estructural y de su utilización.
2. Dado que, en comparación con el cálculo lineal, el análisis plástico exige un esfuerzo de computación muy elevado, es necesario desarrollar procedimientos de análisis eficientes.
3. Existen determinados modelos estructurales de aplicación suficientemente general —un caso típico lo constituyen las láminas plegadas— para los cuales la utilización de un método general de cálculo es ineficiente, resultando, en ese caso, atractiva la aplicación de procedimientos específicos de análisis. La justificación del desarrollo de dichos métodos específicos se evidencia ante un elevado porcentaje de aplicaciones. Esta evidencia aumenta de un modo extraordinario cuando se analizan las estructuras en regímenes no lineales (cálculos plásticos, por ejemplo).

En particular, el análisis plástico de láminas plegadas exige, desde un punto de vista computacional, el desarrollo de procedimientos específicos. Por otra parte, un análisis plástico precisa y produce una muy elevada cantidad de información a nivel de “input-output” que, en el caso de utilizar un método general, es susceptible de generar errores, además de contribuir a una pérdida de la interpretación estructural, e incrementar los costes de entrada de datos y análisis de resultados. Si bien este volumen de información se puede tratar mediante programas pre y posprocesadores, éstos enmascaran a veces el comportamiento estructural.

4. Los cálculos tradicionales de láminas plegadas prismáticas de tipo semianalítico (solución Levy, por ejemplo) no son susceptibles, por su carácter armónico lineal, de ser extendidos, mediante una ampliación directa, al análisis plástico. A este respecto, se hace necesario un modelo específico de cálculo lineal de láminas plegadas, de carácter completamente numérico. En este contexto, el modelo desarrollado en (11) resulta plenamente adecuado.
5. Mediante la utilización de una técnica de búsqueda directa de rótulas —ya empleada anteriormente en entramados planos—, se pueden reducir de modo importante los tiempos de computación, frente a los tradicionales procedimientos paso a paso.

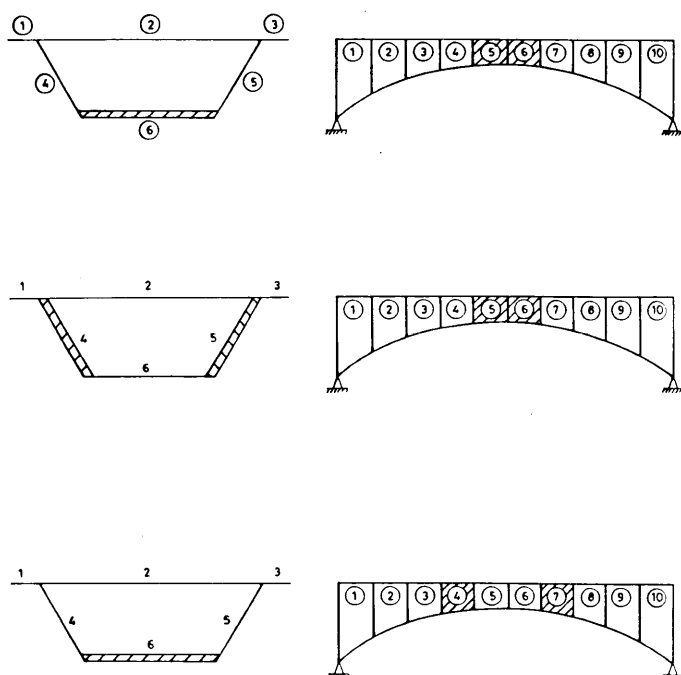


Fig. 47. Ejemplos de aplicación. Evolución de la estructura ante sucesivas plastificaciones.

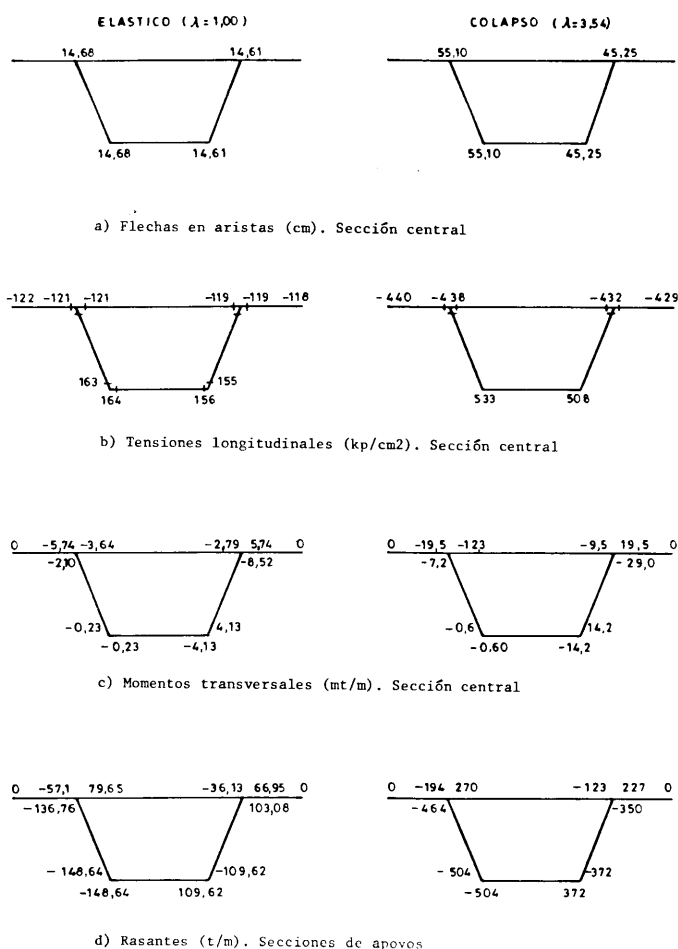


Fig. 48. Ejemplo de aplicación. Diferentes resultados para los estados elástico y de rotura.

6. Un grave inconveniente numérico que aparece en la mayoría de los métodos de cálculo plástico reside en la degradación de la matriz de rigidez de la estructura en fases cercanas a su colapso.

Criterios numéricos de parada basados exclusivamente en la comprobación de la singularidad de dicha matriz han resultado fallidos y, en general, dependientes de la precisión del ordenador utilizado. Aquí se han introducido criterios muy amplios de colapso, más de acuerdo con algunos resultados de la práctica de la ingeniería, basados en la limitación de movimientos, ductilidad máxima, etc.

Por otra parte, la introducción de una pendiente plástica no horizontal, fracción muy pequeña del módulo elástico de Young, constituye una técnica numérica adecuada, que evita el problema de la degradación numérica de las matrices que aparecen en el análisis.

Esta técnica ha sido empleada únicamente en el análisis longitudinal de la lámina plegada, por aparecer en esta fase matrices de flexibilidad. Por el contrario, en el análisis transversal el método de cálculo de rigidez no exigió la introducción de esta técnica y se consideró elastoplasticidad perfecta. La experiencia obtenida en los casos estudiados muestra la bondad y eficacia de este procedimiento.

7. Un aspecto fundamental del cálculo, a veces olvidado en distintos modelos, es el denominado cierre de rótula plástica, que adquiere de nuevo su virtualidad elástica. El desarrollo de un algoritmo que simula este comportamiento, recogido en el programa de computador, ha probado su eficiencia.
8. El cálculo plástico permite un diseño más racional de las estructuras y, en particular, deducir de un modo coherente el grado de seguridad de las mismas. En este contexto, es posible utilizar de un modo natural el método de cálculo plástico para el diseño óptimo de láminas plegadas. Los criterios de aparición simultánea de rótulas están relacionados con un adecuado aprovechamiento del material.
9. La ductilidad es un parámetro de excepcional importancia en el proceso de redistribución de esfuerzos y tensiones en estructuras. El cálculo plástico permite considerar y analizar estas redistribuciones. A estos efectos, es fundamental, en el caso de láminas plegadas, la consideración simultánea de la plasticidad en las dos direcciones, longitudinal y transversal, si se desea captar el complejo fenómeno de su comportamiento.
10. Dentro del área específica del cálculo de tableros de puentes, en el que la aplicación del modelo lámina plegada se hace cada vez más intensiva, un aspecto que suscita una elevada actividad investigadora está representado por la seguridad a la rotura de puentes continuos pretensados. La mayoría de las técnicas hasta ahora desarrolladas para su estudio consideran únicamente el tablero de forma global, es decir, como viga continua (elemento monodimensional). De este modo, los efectos de excentricidad de la carga son ignorados sistemáticamente.

El modelo elastoplástico de láminas plegadas aquí desarrollado puede constituir un procedimiento idóneo para el análisis a rotura de estos tipos estructurales, dado que considera simultáneamente los dos efectos: longitudinal y de reparto transversal.

9. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la empresa STEEL-BETON, S.A. de El Astillero (Santander) por las facilidades dadas en la utilización de sus recursos informáticos.

REFERENCIAS

- (1) EHLERS, G. "Ein neues konstruktions Prinzip". Bauingenieur, Vol. II, n° 8. Berlín, 1930.
- (2) YITZHAKI, D. "Prismatic and Cylindrical Shell Roofs". Haifa Science Publishers. Haifa, Israel, 1958.
- (3) SCORDELIS, A.C. "Analysis of Continuous Box Girder Bridges". College of Engineering. Office of Research Services. University of California. Berkeley, 1967.
- (4) PHASE I REPORT ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION, REPORT OF THE TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION. Journ. of the Struct. Div. ASCE. Vols. 60 and 89 ST6. 1963.
- (5) I.A.S.S. SYMPOSIUM. Vols. 1 and 2. Viena, 1970.
- (6) DEL POZO, F.; TORROJA, J.A. and LOPEZ PALANCO, R. "Tribune for the Dog Racing Stadium of Madrid". World Conference on Shell Structures. San Francisco. National Academy of Science Publication. 1964.
- (7) GRANELL, J. Tesis doctoral presentada en la Universidad Politécnica de Madrid. 1966.
- (8) DEL POZO, F. and SAMARTIN, A. "Nonprismatic Folded Roof Structure". IASS Symposium. Udine (Italia). 1974.
- (9) JOHNSON, C.D. and TI-TA LEE "Long Nonprismatic Folded Plate Structures". Journ. of the Struct. Div. ASCE, n° ST6. Junio, 1968.
- (10) SAMARTIN, A.; J.R. GONZALEZ DE CANGAS and J. MARTINEZ. "A Computer Formulation for the Analysis on Continuous Nonprismatic Folded Plate Structures of Arbitrary Cross-Section". Vol. 2. IASS World Congress on Shell and Spatial Structures. Madrid, 1979.
- (11) GONZALEZ DE CANGAS, J.R. y A. SAMARTIN. "Cálculo matricial de láminas plegadas continuas, no prismáticas, de sección transversal arbitraria". E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. n° AE80.7. Santander, 1980.
- (12) GONZALEZ DE CANGAS, J.R.; A. SAMARTIN y J. MARTINEZ. "Evolución de los métodos de cálculo de láminas plegadas. Una aportación al análisis de estructuras no prismáticas". Hormigón y Acero, n° 139. 2º trimestre, 1981.
- (13) BAKER, J.F. "The Steel Skeleton". Cambridge University Press. Londres, 1956.
- (14) NEAL, B.G. "The Plastic Methods of Structural Analysis". Chapman and Hall, Ltd. Londres, 1956.
- (15) JOHANSEN, K.W. "Yield-line Theory". Cement and Concrete Association. Londres, 1962.
- (16) T. VAN LANGENDONCK. "Teoria elementar das Charneiras Plasticas". Associação Brasileira de Cimento Portland. Sao Paulo, 1970.
- (17) POWELL, G.H.; A. SUDHAKAR; G. ORR and R. WHEATON. "ULARC". National Information Service Earthquake Engineering University of California. Berkeley, 1972.
- (18) ARROYO, V.; GONZALEZ DE CANGAS, J.R. and A. SAMARTIN. "A Plastic Analysis of Nonprismatic Folded Plate Structures". International Symposium on Shell and Spatial Structures' 83. Río de Janeiro, Setiembre, 1983. (A publicar en los "Proceedings" de dicho Simposio).
- (19) BENITO, C. "Cálculo plástico. Vigas y pórticos" 2ª edición. Madrid, 1966.